



Delhi University
ARTS LIBRARY

ARTS LIBRARY
(DELHI UNIVERSITY LIBRARY SYSTEM)

Cl. No. B32

168N29.3

Ac. No. 10385

This book should be returned on or before the date last stamped
below. An overdue charge of **10 Paise** will be charged for each day
the book is kept over-time.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

صغاری احصاء

جلد سوم

تصنیف

ہوریس لمیب ایم۔ اے ایل ایل ڈی، ایس۔ سی ڈی، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔ اے کوشن چند ایم۔ اے

پروفیسر ان کلیہ جامعہ عثمانیہ

۱۳۲۸ھ ۱۳۳۹ھ ۱۹۳۰ء

طبع دارالکتاب العربیہ لاہور

یہ کتاب مسرز سیکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے
جن کو حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ
کر کے طبع و شائع کی گئی ہے

دیباچہ (ارمُصنِف)

اس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصا کے ان حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں اس وقت اس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ مہولت بخش ثابت ہوئی ہے۔

اس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کی گئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترتیبات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔ ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقت کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{فرعاً}}{\text{قوت}} = \text{ما}$$

کا معیاری حل ہے۔ اس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جانے کا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جاسکتا لیکن

کہنا بیجا نہ ہو گا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصا کے
تعلق کے مد نظر کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل
ترجیح بھی ہے۔

لا متناہی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تشریح اور بحمل
کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں پچھلی اشاعتوں میں ان سوالوں
پر یکساں استدقاق کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی احصا
کی کتاب میں اس وقت اس نظریہ کا داخل کر لینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی
انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ
موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اس کو ترک
کر دیا گیا ہے۔ اس کی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے جو صرف فوری
سوالوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم
کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ درجہ تک ترقی
نہ کر جائے۔

کمیت کے مرکزوں، دو درجی معیاروں، اور اسی قسم کی دیگر چیزوں
میں اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کر دیا گیا ہے اور ان کا یہ شمار حصہ
مختص کی دوسری کتابوں میں منتقل کر دیا گیا ہے فقط
جون ۱۹۱۹ء

ہورس لینیب

فہرست مضامین

صفحہ	مضمون	صفحہ
	گیارہواں باب	
	پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں	
۵۲۱	تفرقی مساواتوں کی تکوین -	۱۵۱
۵۲۲	پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں	۱۵۲
۵۲۶	حل کرنے کے طریقے - ایک متغیر غائب -	۱۵۳
۵۲۷	متغیر جذباتی پذیر -	۱۵۴
۵۳۰	ٹھیک مساواتیں -	۱۵۵
۵۳۳	متجانس مساواتیں	۱۵۶
۵۳۵	مستقل سرول والی پہلے رتبہ کی خطی مساوات	۱۵۷
۵۳۹	پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات	۱۵۸

۵۴۱	قائم خطوط رمی۔	۱۵۹
۵۴۵	ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں	۱۶۰
۵۴۶	کلیروی صورت	۱۶۱
۵۴۹	امشکہ نمبری ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴	
<h2>بارہواں باب</h2> <h3>دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں</h3>		
۵۶۳	نمونہ $\frac{فر۲ ما}{فر۱ لا} = ف (لا)$ کی مساواتیں	۱۶۲
۵۶۵	$\frac{فر۲ ما}{فر۱ لا} = ف (ما)$ سے نمونہ کی مساواتیں۔	۱۶۳
۵۷۱	تفرقی مساواتیں جنہیں صرف پہلے اور دوسرے	۱۶۴
۵۷۵	رتبہ کے مشتق موجود ہوں	
۵۷۸	مساواتیں جن میں ایک متغیر موجود نہیں ہے۔	۱۶۵
۵۸۳	دوسرے رتبہ کی خطی مساوات	۱۶۶
	امشکہ نمبری ۵۵	
<h2>تیسرے ہواں باب</h2> <h3>مستقل رتبہ کی خطی مساواتیں</h3>		

۵۹۰	دوسرے رتبہ کی مساواتیں۔ متمم تفاعل	۱۶۶
۵۹۶	خاص سلسلہ کی تعین	۱۶۸
۶۰۳	عامل عطف کی خاصیتیں	۱۶۹
۶۰۴	مستقل سہروں والی عام تفرقی مساوات۔ متمم تفاعل	۱۷۰
۶۰۹	خاص سلسلہ	۱۷۱
۶۱۴	متجانس خطی مساوات	۱۷۲
۶۱۸	ہمزاد تفرقی مساواتیں	۱۷۳
۶۲۸	امثلہ نمبر ۵۶، ۵۷، ۵۸	

چودھواں باب

قوتی سلسلوں کا تفرق اور مکمل

۶۳۷	سوال کا بیان	۱۷۴
۶۳۹	لوکارنی سلسلہ کی دریافت	۱۷۵
۶۴۴	گرگوری کا سلسلہ۔	۱۷۶
۶۴۷	قوتی سلسلوں کا استنتاج	۱۷۷
۶۵۱	قوتی سلسلوں کا تسلسل	۱۷۸
۶۵۲	قوتی سلسلہ کا تفرق	۱۷۹
۶۵۴	قوتی سلسلوں کا مکمل	۱۸۰
۶۵۵	تفرقی مساوات کامل سلسلوں کے ذریعہ	۱۸۱
۶۵۸	تفرقی مساوات کی مدد سے چیلانڈ	۱۸۲
۶۶۳	امثلہ نمبر ۵۹، ۶۰، ۶۱	

پندرہواں باب

ٹیلر کا مسئلہ

۶۷۱	پھیلاؤ کی شکل	۱۸۳
۶۷۳	خاص صورتیں	۱۸۴
	سیکلورین اور ٹیلر کے مسائل کا ثبوت :- ن رقموں کے	۱۸۵
۶۷۷	بعد باقی	
۶۸۳	متبادل ثبوت	۱۸۶
۶۸۵	کوششی کی باقی کی شکل	۱۸۷
۶۸۷	بعض پھیلاؤ	۱۸۸
۶۹۰	مسئلہ ٹیلر کا اطلاق - منحنیات کا رتبہ تماس	۱۸۹
۶۹۳	اعظم اور اقل قیمتیں	۱۹۰
۶۹۶	مستوی منحنیات کا صغاری ہندسہ -	۱۹۱
۶۹۸	امثلہ نمبری ۶۲، ۶۳	

سولھواں باب

متعدد متبوع متغیروں کے تفاعل

۷۰۵	مختلف رتبوں کے جزوی مشتقات	۱۹۲
۷۰۷	خاصیت مبادلہ کا ثبوت	۱۹۳
۷۱۱	ٹیلر کے مسئلہ کی توسیع	۱۹۴
۷۱۴	پھیلاؤ میں عام رقم	۱۹۵
۷۱۶	دو متغیر کے تفاعل کی اقل اور اعظم قیمتیں اور انکی ہندسی تعبیر	۱۹۶

۷۲۴	مشروط تفاعل و مکی اعظم اور اقل قیمتیں	۱۹۷
۷۲۵	لغائب	۱۹۸
۷۲۷	جزوی تفرق کے اطلاقات	۱۹۹
۷۳۰	تضمینی تفاعل کا تفرق	۲۰۰
۷۳۲	تغیر کا بدلہ	۲۰۱
۷۳۵	امثلہ نمبری ۶۲، ۶۵، ۶۶	
۷۴۳	ضمیمہ جات	
(†)		

حاصل ہو جائے گی۔ ان دونوں مساواتوں میں ج کو ساقط کرنے سے پہلے
 رتبہ کی تفرقی مساوات حاصل ہوگی۔ زیادہ عام صورت میں اگر متغیروں
 (۱) (۲) اور (۳) اختیاری مستقلات ج، ج، ج..... ج جن میں رشتہ
 دیا ہوا ہو تو بلحاظ (۱) کے اس کو ن مرتبہ مسلسل وار تفرق کرنے سے کل
 (ن + ۱) مساواتیں حاصل ہونگی جن میں سے ن اختیاری مستقل ساقط
 کئے جاسکتے ہیں۔ حاصل اسقاط ن ویں رتبہ کی تفرقی مساوات ہوگی۔
 اس نقطہ نظر سے پہلے رشتہ کو ہم ابتدائی حل یا محض "ابتدائی" کہیں گے۔

مثال (۱)۔ اگر ابتدائی ما = م + لا + ج ج (۱)
 مبدؤ تفرقی مساوات ہے

$$(۲) \dots\dots\dots م = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

مثال (۲)۔ ابتدائی ما = م + لا + ج ج (۳) سے

$$\text{مساوات ما} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲ + \dots\dots\dots (۴) \text{ حاصل ہوتی ہے۔}$$

مثال (۳) اگر ابتدائی لا جم عا + ما جب عا = و (۵)
 ہو جہاں عا اختیاری مستقل ہے تو مساوات

$$\text{جم عا} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ جب عا} = \dots\dots\dots \text{ حاصل ہوتی ہے۔}$$

ان سے (ما - لا) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ جب عا = و (ما - لا) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ جم عا = - و $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$
 حاصل ہوتے ہیں۔ اور ان کا مربع لیکر جمع کرنے سے مساوات

$$(ما - لا) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲ + \dots\dots\dots \{ ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) \} \dots\dots\dots (۶) \text{ حاصل ہوتی ہے}$$

مثال (۴) اگر ابتدائی ما = لا + ب (۷) میں سے
 مستقلات (۱) اور ب ساقط کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فر۲}{فر۱} = \dots \dots \dots (۸)$$

مثال ۵۔ ابتدائی (لا - ع) + (ما - با) = ۲ (۹)
میں سے ع اور با ساقط کرنے سے مساوات

$$۱ + \left(\frac{فر۲}{فر۱} \right) = ۲ \dots \dots \dots (۱۰)$$

حاصل ہوتی ہے۔ عمل کی تفصیل دفعہ ۱۸۹ میں دی گئی ہے۔
اوپر کے اعمال کی ہندی تعبیر ہو سکتی ہے۔ ابتدائی میں اختیاری مستقلوں کے بدلنے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں وہ منحنیوں کے کسی قبیل یا نظام کو ظاہر کرتی ہیں۔ تفرقی مساوات (جس میں یہ مستقلات نہیں شریک ہوتے) ان تمام منحنیوں کی کسی خاص مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے۔ مثلاً مثال (۲) میں ابتدائی 'مساوی مکافیوں' کے ایسے قبیل کو ظاہر کرتا ہے جنکے محور، لا محور پر منطبق ہوتے ہیں لیکن انکے اس مختلف نقطوں پر ہیں۔ تفرقی مساوات (۴) ان تمام منحنیوں کی ایک مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے اور وہ مشترک خاصیت یہ ہے کہ زیر عماد سے ہوسے مستقل ۲ کے مساوی ہے۔

نیز مثال (۵) کے ابتدائی میں اگر ع اور با کو بدلا جائے تو دئے ہوئے نصف قطر ۱ کے دائروں کا ایک دوہرا لائٹنا ہی نظام حاصل ہوتا ہے ان دائروں کے مرکزہ مستوی لا مایں کہیں بھی ہو سکتے ہیں۔ تفرقی مساوات اس خاصیت کو ظاہر کرتی ہے کہ نصف قطر انحناء ہر جگہ مستقل ۱ کے مساوی ہے۔ دفعہ ۱۳۵ دیکھو۔

حرکیات سے اور مثالیں دیجا سکتی ہیں۔

مثال ۶۔ اگر ابتدائی لا = ۱/۲ ج + (ت + ب) (۱۱)
میں (ا اور ب) کو بدلا جائے تو خطی حرکتوں کا ایک خاص گروہ یا جماعت حاصل ہوتی ہے

$$تفرقی مساوات \frac{فر۲}{فر۱} = ج \dots \dots \dots (۱۲)$$

اس گروہ کی اس مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے کہ اسرارع کی مستقل قیمت ج ہے۔
 مثال ۷۔ نیز ابتدائی $\frac{1}{2}$ = (جمن ت + ب جب ن ت ... (۱۳)
 سے مساوات $\frac{1}{2}$ = ن^۲ لا (۱۴)

حاصل ہوتی ہے۔ یہ تفرقی مساوات اس بات کو بیان کرتی ہے کہ ابتدائی حل سے حاصل شدہ حرکت میں اسرارع 'لا کے مبدا کی جانب ہے اور اسرارع کو مبدا سے فاصلہ کیسا تھ مستقل نسبت ن^۲ ہے۔
 مذکورہ بالا مثالوں سے یہ بالکل ظاہر ہے کہ کسی ایسے ابتدائی رشتہ سے جس میں لا، ما اور ایک یا ایک زیادہ اختیاری مستقل ت شامل ہوں ابتدائی تفرقی مساوات کس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔ علمی طور پر عموماً اس سوال کا عکس درمیش ہوتا ہے یعنی متغیروں میں عام سے عام ایسا رشتہ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے جو دی ہوئی تفرقی مساوات کو پورا کرے۔

مثلاً اگر مندرجہ کی یا حرکیات کی کوئی عام خاصیت ہو جس کو تفرقی مساوات کی شکل میں بیان کیا گیا ہے تو ہم متغیروں کے اس پورے قبیل کو یا حرکتوں کے اس گروہ کو دریافت کرنا چاہتے ہیں جو یہ خاصیت رکھتے ہوں۔
 دی ہوئی تفرقی مساوات سے متغیروں میں عام رشتہ دریافت کرنے کے عمل کو مساوات کا 'حل کرنا' یا 'تکمیل کرنا' کہتے ہیں اس عام رشتہ میں مستقلوں کی نسبت تعداد کا موجود ہونا ضروری ہے اس 'نتیجہ کو ہم' عام حل 'یا کامل ابتدائی' کہتے متغیروں میں کوئی خاص رشتہ جو مساوات کو پورا کرے 'خاص حل' کہلاتا ہے۔

۱۵۲۔ پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

پہلے رتبہ کی عام تفرقی مساوات ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$\text{فما (لا، ما، فرما)} = \dots \dots (1)$$

اس مساوات میں یہ مفہم ہے کہ ما متغیر لا کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ مسلسل ہے ایک اختیاری مستقل والے ابتدائی سے پہلے ترتیب کی تفرقی مساوات کے بنائیکے طریقے سے (جو دفعہ ۵۱ میں بتایا گیا ہے) بیخیال پیدا ہوتا ہے کہ مساوات (۱) کا عام حل ہر صورت میں لا، ما اور ایک اختیاری مستقل پر مشتمل ہوگا۔ اور دراصل یہ بات صحیح ہے۔ مگر بعض صورتوں میں مساوات کا نا در حل (دفعہ ۱۶۱) ہوتا ہے جس میں اختیاری مستقل نہیں ہوگا۔ اس امر کا باقاعدہ ثبوت مشکل ہے۔ اور اسکو یہاں نظر انداز کرنا بیجا ہوگا کیونکہ ان تمام صورتوں میں جنکے مکمل کے عملی طریقے دریافت ہو چکے ہیں ان کے عمل سے ظاہر ہو جاتا ہے کہ حل مذکورہ بالا نوعیت کا ہے۔

عام سوالات میں مساوات (۱) کے دائیں جانب کا رکن $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کا منطبق صحیح جبریہ تفاعل ہو گا یا اس شکل میں لایا جاسکیگا۔ مساوات کا ”درجہ“ اس میں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی بڑی سے بڑی قوت سے مقرر کیا جاتا ہے۔ پہلے درجہ کی عام مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\text{م} + \text{ن} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad (۲)$$

یا $\text{م} - \text{فرلا} + \text{ن} = \text{فرما}$ (۳) جس میں م اور ن متغیرون لا، ما کے دئے ہوئے تفاعل میں نیز شکل (۲) اس کے معادل ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{ف} \quad (۴)$$

اگر لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے ف (لا، ما) حقیقی اور وحید القیمت ہے تو مستوی لا، ما کے ہر ایک نقطہ کے جواب میں مساوات (۴) سے

ایک خاص سمت حاصل ہوگی۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ ایک نقطہ 'مستوی' کے کسی مقام سے شروع ہو کر ہمیشہ اس طور پر حاصل شدہ سمت میں حرکت کرتا جائے تو یہ ایک منحنی مرتسم کریگا جو دی ہوئی تفرقی مساوات کا ایک خاص حل ہوگا۔ ایسے منحنیوں کے مجموعہ سے ایک واحد لاتناہی نظام حاصل ہوگا۔ اس نظام کے ہر منحنی کا تقصین اس نقطہ سے ہو سیکے گا جہاں پر یہ منحنی ایک اختیاری خط مستقیم کو قطع کرتا ہے۔ نیز اس سے ظاہر ہے کہ موجودہ صورت میں نظام کے کوئی دو منحنی ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گے۔

پس ہمیں اس امر کا کچھ ذہنی ثبوت حاصل ہو گیا کہ مساوات (۴) کے حل میں صرف ایک اختیاری مستقل ہوگا۔

اب ہم مختلف صورتوں میں مساوات (۴) کے حل کے معلومہ طریقوں پر غور کریں گے۔

۱۵۳۔ حل کرنے کے طریقے۔ ایک متغیر غائب۔

(۱) شکل $\frac{فرما}{فرلا} = ف (لا)$ (۱)

جس میں ماتریمی طور پر موجود نہیں ہے صرف سادہ مکمل سے حل ہو سکتا ہے۔
مثلاً $ما = ف (لا) فرلا + ج$ (۲)
جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

(۳) مساوات $\frac{فرما}{فرلا} = ف (ما)$ (۳)

جس میں لا تصریحی طور پر موجود نہیں ہے ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$\frac{فرما}{ف (ما)} = فرلا$$

[یعنی اس کا باقاعدہ ثبوت کوششی نے دیا ہے۔]

بس سے $\int \frac{فرما}{ف(ما)} = (لا + ج) \dots \dots \dots (۴)$
 مثال :- وہ منحنی دریافت کرو جن میں زیرعما س مستقل ۱ ہے۔

اب دفعہ ۶۰ سے $ما \div \frac{فرما}{فرلا} = ۱$

یا $\frac{فرما}{ما} = \frac{فرلا}{۱} \dots \dots \dots (۵)$

اس لئے لوک $ما = \frac{لا}{۱} + ج$

یا $ما = ب فو \dots \dots \dots (۶)$

جہاں $ب = فو$ اختیار مستقل ہے۔

۱۵۴ - متغیر جدائی پذیر۔

اس کی عام شکل ہے $ف(لا) + ف(ما) \frac{فرما}{فرلا} = \dots \dots \dots (۱)$

۳۸۶ اگر مساوات اس شکل میں لائی جاسکتی ہے تو کہتے ہیں کہ متغیر جدائی پذیر ہے
 ظاہر ہے کہ اس کا حل ہے

کی $ف(لا) فرلا + ف(ما) فرما = ج \dots \dots \dots (۳)$

مثال ۱ - وہ منحنی دریافت کرو جنکے تمام عماد ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

اگر اس نقطہ کو قائم محوروں کا مبدأ مان لیں تو دی ہوئی شرط سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{فرما}{فرلا} = - \frac{لا}{ما}$

$$یا لا فر لا + ما فر ما = . (۴) \dots \dots \dots$$

$$اس لئے (لا + ما) = ج . (۵) \dots \dots \dots$$

پس مطلوبہ منحنی ایسے دائرے میں جتنا مرکز مبدا ہے۔

مثال ۲۔ ایسا منحنی دریافت کرو کہ کسی بیرونی نقطہ سے اس کے

تمام تماس مساوی ہوں۔

اگر اس کے ایک ثابت تماس کو ابتدائی خط فرض کریں اور نقطہ تماس کو مبداء تواً ابتدائی خط کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے دونوں تماس کے مساوی ہونے کی شدت دفعہ ۶۳ کی تقسیم کے مطابق $طما = فما$ ہے

$$اور اس لئے $\frac{کا فر طما}{فر کا} = مس طما \dots \dots \dots (۶)$$$

$$پس $\frac{فر کا}{کا} = مم طما فر طما \dots \dots \dots (۷)$$$

$$اور لوگ کا = لوگ جب طما + ج$$

$$یا $س = لا جب طما \dots \dots \dots (۸)$$$

جہاں لا اختیاری مستقل ہے۔

اُس لئے صرف دائرہ ہی ایسا منحنی ہے جو دی ہوئی شرط کو پورا کرتا ہے۔

مثال ۳۔ ایک ذرہ ایسی قوت کشش کے زیر عمل جو ایک ثابت نقطہ

سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے خط تقسیم میں حرکت کر رہا ہے۔ اس کی حرکت کی

مسادات یہ ہے

$$(۹) \dots\dots\dots \frac{م}{لا} = \frac{فر}{لا} \dots\dots\dots$$

بلحاظ لا کے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱۰) \dots\dots\dots م + \frac{م}{لا} = \frac{۱}{۲} \dots\dots\dots$$

اگر لا = ∞ کے لئے ۶ صفر ہو تو م = ۰
ایسی صورت میں قوت کے مرکز سے فاصلہ ۱ پر ذرہ کی رفتار $\sqrt{\frac{۳۳۲}{۱}}$

$$\frac{م}{لا} = \dots\dots\dots$$

پس حالت سکون سے بہت بڑے فاصلہ سے گزرنے والا ذرہ جبکہ خلافت کوئی فراجمت عمل نہ کرے اس رفتار سے سطح زمین پر پہنچے گا جہاں زمین کا نصف قطر ہے اور ج سطح پر اسراع بکا ذیہ ارض ہے۔
مثال ۴ - یکساں افقی بوجہ والے متعلق بل میں زنجیر کی شکل اس شرط سے حاصل ہوتی ہے کہ نخنی کے کوئی دو ماس و تر تاس کی تنصیف کرنے والے انتصابی پر قطع کرتے ہیں۔

اگر ذہر ترین نقطہ قائم محوروں کا مبدأ لیا جائے اور اس نقطہ کا ماس لا محور ہو تو نخنی کے کسی نقطہ کا زیر ماس نصف فاصلہ کے مساوی ہوگا۔

$$\text{پس} \quad م \div \frac{فر}{لا} = \frac{۱}{۲} \dots\dots\dots$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{فر}{لا} = ۲ \dots\dots\dots$$

اس کا تحمل ہے لوک م = ۲ لوک لا + م (مستقل)

$$(۱۲) \dots\dots\dots \frac{لا}{۱} = م \dots\dots\dots$$

جہاں Δ اختیاری ہے۔
یعنی زنجیر کی شکل قطع مکانی ہے جس کا محور انتصابی ہے۔

۱۵۵۔ ٹھیک مساواتیں۔

دفعہ گذشتہ دراصل ٹھیک مساوات کے عنوان کے ماتحت آتی ہے۔

مساوات Δ فر Δ + ن فر Δ = (۱)
اس صورت میں ”ٹھیک“ تفرقی مساوات کہلائے گی جبکہ Δ اور ن

بالترتیب $\frac{\text{جف } \Delta}{\text{جف } \Delta}$ اور $\frac{\text{جف } \Delta}{\text{جف } \Delta}$ کی شکل کے ہوں۔

مساوات Δ فر Δ + $\frac{\text{جف } \Delta}{\text{جف } \Delta}$ فر Δ = (۲)

معاول ہے فر Δ = (۳)

کے اور اسکا مکمل ہے Δ = ج (۴)
جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ (۱) کے نمونہ کی ہر مساوات یا تو ”ٹھیک“ ہے
یا متناصبہ مکمل جزو ضربی سے ضرب دیکر ”ٹھیک“ بنائی جاسکتی ہے نیز
ایسے اجزائے ضربی کی تعداد غیر ثوابی ہے کیونکہ اگر ہم فرض کر لیں کہ مساوات
(۱) شکل (۲) میں لائی جا چکی ہے تو اسے (۶) سے ضرب دینے پر
نئی ”ٹھیک“ رہے گی۔ جہاں اس (۶) ”تغیر“ کا کوئی تفاعل ہے۔

ش (۶) فر Δ = (۵)

ش (۶) = ج (۶)

یہ ضرب (۴) کے معاول ہے۔

[* اس بات کے دریافت کرنے کا وعدہ کہ پہلے درجہ کی دی ہوئی مساوات ٹھیک

ہے یا نہیں دفعہ ۱۹۳ میں دیا گیا ہے]

مثال ۱۔ (لا + ہا + گ) فر + (ہا + ب + ف) فر ما = (۷)

یہ معادل ہے

فر (لا + ہا + ب + ما + گ) فر + (ہا + ب + ف) فر ما = (۸)
 پس (لا + ہا + ب + ما + گ) فر + (ہا + ب + ف) فر ما = ج (۹)
 مثال ۲۔ لا فر + ما فر ما = گ (لا فر ما - ما فر لا) (۱۰)
 یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

فر (لا + ما) = گ لا فر (لا) (۱۱)

اور اس لئے (لا + ما) سے تقسیم کرنے پر ٹھیک مساوات بن جاتی ہے۔ پس

فر (لا + ما) = گ فر (لا) (۱۲)

$$\frac{\text{فر (لا + ما)}}{\text{لا} + \text{ما}} = \frac{\text{گ فر (لا)}}{\frac{\text{لا}}{\text{لا}} + 1}$$

اس لئے تکمیل کرنے پر

لوک (لا + ما) = گ مسن (لا) + ج (۱۳)

مساوات (۱۰) ذیل کی طرح بھی حل کی جاسکتی ہے۔

ابدال لا = س جم طھا اور ما = س جب طھا (۱۴)
 سے لا فر لا + ما فر ما = س فر س اور لا فر ما - ما فر لا = س فر طھا (۱۵)
 اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

فر س = گ فر طھا (۱۶)

پس لوک س = گ طھا + ج (۱۷)

اور یہ صریحاً (۱۳) کے معادل ہے۔

مثال ۳۔ ایسے گردشیں مجسم کی شکل دریافت کرو جس میں کسی عمودی تراش سے

کٹے ہوئے حجم کا اوسط مرکز سطح تقاطع سے محور کے طول کے $\frac{1}{n}$ فاصلے پر واقع ہو۔
اگر محور نشان لکھ کر لا محور لیا جائے اور مائیکون منحنی کا معین ہو تو دفعہ ۱۱۲ (۱۱) کی رو سے

$$\bar{y} = \frac{\sum y^2}{\sum y} = (1 - \frac{1}{n}) \bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y^2}{\sum y} = (1 - \frac{1}{n}) \bar{y} \quad (18)$$

جہاں \bar{y} کاٹنے والے عمودی مستوی کا فاصلہ ہے۔
پس اگر ”ع“ اس سطح تقاطع کا نصف قطر ہو تو دفعہ ۹۲ کے قاعدے کی رو سے بلحاظ \bar{y} کے تفرق کرنے سے

$$\bar{y} = \frac{\sum y^2}{\sum y} = (1 - \frac{1}{n}) \bar{y} + \frac{\sum y}{n}$$

$$\bar{y} = (1 - \frac{1}{n}) \bar{y} + \frac{\sum y}{n} \quad (19)$$

دوبارہ تفرق کرنے سے

$$\bar{y} = (1 - \frac{1}{n}) \bar{y} + \frac{\sum y}{n} \quad (20)$$

$$\bar{y} = (1 - \frac{1}{n}) \bar{y} + \frac{\sum y}{n} \quad (21)$$

اور مکمل کرنے سے $\bar{y} = (1 - \frac{1}{n}) \bar{y} + \frac{\sum y}{n}$
اس لئے ابتدائی منحنی $\bar{y} = (1 - \frac{1}{n}) \bar{y} + \frac{\sum y}{n}$ (۲۲) کے نمونے کا ہے۔
چونکہ ہم نے بلحاظ \bar{y} کے دو مرتبہ تفرق کیا ہے، اس لئے اعلیٰ کردہ تفرق سادہ

ابتدائی سوال سے ذرا زیادہ عام ہے۔ درحقیقت اگر (۱۶) سے دونوں محدود تکملوں کے نیچے کی حدود بجائے صفر کے کچھ اور مستقل کر دے جائیں تو بھی تقریبی مساوات وہی حاصل ہوگی۔ اس لئے تجربی طور پر ایسی بات کی تصدیق ضروری ہے کہ آیا حاصل شدہ 'لا' ابتدائی مساوات کو پورا کرتا ہے یا نہیں۔ یہ تصدیق $n < 2$ کے لئے آسانی سے ہو سکتی ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $n = 2$ تو جسم گردش کی مکانی نما ہے اور اگر $n = 3$ تو یہ مخروط ہے۔

۱۵۶۔ متجانس مساواتیں۔

فرض کرو کہ مساوات $لا + ن = ۰$ میں $لا$ اور $ن$ متغیروں
'لا' کے ایک ہی درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔

اس صورت میں کسر $\frac{لا}{ن}$ صرف $\frac{لا}{ن}$ کا تفاعل ہے۔ اور اسلئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{لا}{ن} = ف \left(\frac{لا}{ن} \right) \dots \dots \dots (۱)$$

$$اگر لا = لا + تو \frac{لا}{ن} = و + ف (و) \dots \dots (۲)$$

اس میں متغیر 'لا' و جدائی پذیر ہیں اور اسلئے

$$\frac{لا}{ن} = \frac{ف (و)}{و} \dots \dots \dots (۳)$$

$$پس لوک لا = لا + ف (و) = ج \dots \dots \dots (۴)$$

تکمل کے بعد اس میں $و = \frac{لا}{ن}$ لکھنا ہوگا۔

مثال :- (لا - ما) فرما - فرما - لا ما = (۵)

اس میں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\frac{\text{ما}}{\text{لا}}}{\frac{\text{لا}}{\text{لا}} - ۱}$ (۶)

اس لئے $\frac{\text{لا فرو}}{\text{فرلا}} = ۱ + \frac{۱}{\text{لا} - ۱}$

یعنی $\frac{\text{لا فرو}}{\text{فرلا}} = \frac{۱ + (۱ + \text{لا})}{\text{لا} - ۱}$

اس لئے $\frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \frac{(۱ - \text{لا}) \text{فرو}}{(۱ + \text{لا})} = \left[\frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۱}{۱ + \text{لا}} \right] \text{فرو}$ (۷)

مکمل کرنے سے لوک لا = لوک و - لوک (۱ + و) + مستقل

یہ معادل ہے لا (۱ + و) = ج و

سکے یعنی لا + ما = ج ما (۸)

اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ تجانس تقریبی مساوات کا عام حل 'متشابہ' اور 'متشابه' طور پر رکھے ہوئے تختیوں کے ایک قبیل کو ظاہر کرتا ہے جس میں متشابہت کا مرکز مبداء ہے۔ کیونکہ مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ جہاں تختیات 'مبداء' میں گزرنے والے

کسی اختیار پر خط $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{م کو قطع کرتے ہیں وہاں فرما کی قیمت ہر منحنی}$

کے لئے وہی ہے یعنی حاس توازی ہیں۔

مثلاً مذکورہ بالا مثال میں مساوات کا حل 'دائروں کے ایک قبیل کو ظاہر کرتا ہے جو لا محور کو مبداء پر مس کرتے ہیں۔

اب اگر (۷) میں ج = لوک ج رکھیں تو $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ یا و 'متغیر ج' کے تفاعل

کی شکل میں دریافت ہوتا ہے۔ بالفاظ دیگر ابتدائی حل لا، ما اور ج میں تجانس ہے

اور اس لئے یہ شکل ذیل کا ہوگا

$$(۹) \quad \dots \dots \dots = \left(\frac{لا}{ج} , \frac{ما}{ج} \right) \text{ فضا}$$

یہ امر مذکورہ بالا ہندسی خاصیت کے مطابق ہے کیونکہ اگر لا، ما اور ج کو ایک ہی نسبت میں بدلا جائے تو مساوات (۹) میں کوئی تغیر نہیں ہوتا۔ یعنی ج کی قیمت کے بدل دینے سے منحنی کا صرف پیمانہ بدل جاتا ہے۔

۱۵۷۔ مستقل سروں والی پہلے رتبہ کی خطی مساوات

کوئی مساوات جس میں ما اور اسکے مشتق صرف پہلے درجہ میں شریک ہوئے ہوتے ہیں، خطی مساوات کہلاتی ہے۔ پس پہلے رتبہ کی خطی مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی

$$(۱) \quad \dots \dots \dots ق = پ + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

جہاں پ اور ق لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔ پہلے ہم اس صورت پر غور کریں گے جبکہ پ مستقل ہو کیونکہ بعد میں یہ صورت کار آمد ثابت ہوگی۔

$$(۲) \quad \dots \dots \dots ق = ا + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

اگر ق = ۰۔ تو دفعہ ۳۸ سے ملے

(۳) $ما = ج \cdot \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جزو ضربی $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ مساوات (۲) کے دائیں جانب کو ٹھیک مشتق بنا دیتا ہے۔ اس سے عام صورت (جبکہ ق $\neq ۰$) کے حل کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

$$(۴) \quad \dots \dots \dots ق = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} (ق - ا) \quad \text{پس مساوات (۲) معادل ہے}$$

کے اور اسلئے $\text{قو}^{\text{لا}} \text{ما} = \text{رق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} + \text{ج}$

یعنی $\text{ما} = \text{قو}^{\text{لا}} \text{رق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} + \text{ج} \text{قو}^{\text{لا}} \dots (۵)$

مروجہ دستور (دیکھو دفعہ ۱۶۶) کے مطابق (۵) کے بائیں جانب کی پہلی رقم کو خاص تکمیل اور دوسری رقم کو متمم تفاعل کہتے ہیں۔

ذیل کی صورتیں اہم ہیں $\text{قو}^{\text{لا}} \text{ق} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \dots (۶)$

تو $\text{رق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} \times \frac{\text{ح}}{\text{ق}^{\text{لا}} - \text{ق}^{\text{لا}}}$

اور $\text{ما} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{ج} + \text{قو}^{\text{لا}} \dots (۷)$

دیکھئے سے فوراً تصدیق ہو سکتی ہے کہ بائیں جانب کی پہلی رقم دی ہوئی مساوات کا خاص نکتہ ہے۔

(۶) نتیجہ (۷) کی تصحیح کی ضرورت ہوگی جبکہ $\text{ق}^{\text{لا}} = \text{ق}$

یعنی $\text{ق} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \dots (۸)$

اس صورت میں $\text{رق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} \times \frac{\text{ح}}{\text{ق}^{\text{لا}} - \text{ق}^{\text{لا}}}$

اور $\text{ما} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{ج} + \text{قو}^{\text{لا}} \dots (۹)$

(۳) اگر $\text{ق} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \dots (۱۰)$

تو $\text{رق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا} \times \frac{\text{ح}}{\text{ق}^{\text{لا}} - \text{ق}^{\text{لا}}}$

اور $\text{ما} = \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{ق}^{\text{لا}} \text{قو}^{\text{لا}} \text{ج} + \text{قو}^{\text{لا}} \dots (۱۱)$

مثال (۱)۔ اگر کسی ذرہ پر فراحت رفتار کے متناسب ہو اور وقت کے معلومہ تفاعل کے مساوی کوئی قوت اس پر عمل کر رہی ہو تو اس حرکت کی مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی۔

$$\text{فرع} + \text{ک} = \text{ع} = \text{ف (ت)} \dots \dots (۱۲)$$

اس کا مکمل ہے

$$\text{ع} = \text{مر} + \text{فو} + \text{ک} = \text{ف (ت)} \dots \dots (۱۳)$$

مثلاً اگر ف (ت) = ج

$$\text{تو} \text{ع} = \text{مر} + \text{فو} + \text{ج} \dots \dots (۱۴)$$

یہ نتیجہ تقریبی مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھنے سے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\text{فرع} = \text{ع} - \left(\frac{\text{ج}}{\text{ک}}\right) + \text{ک} = \text{ع} - \left(\frac{\text{ج}}{\text{ک}}\right) \dots \dots (۱۵)$$

$$\text{اس لئے} \text{ع} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}} = \text{مر} + \text{فو} \dots \dots (۱۶)$$

جیسے ت بڑھتا ہے ع متنازلاً انتہائی قیمت ج اختیار کرتا ہے۔

مثال (۲)۔ اگر لطافت کی برقی رو ایک دور میں سے بہہ رہی ہو اور دو کی ذاتی مالیت کی شرح ل ہو اور فراحت ز اور دور میں قوت محرکہ برق ق ہو تو مساوات

$$\text{مال} \text{ہو} \text{تی} \text{ہے} \text{ل} = \text{فرع} + \text{ز لا} = \text{ق} \dots \dots (۱۷)$$

اگر ق مستقل ہو تو اس کا حل ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ز}} + \text{ج} + \text{فرع} \dots \dots (۱۸)$$

جہاں ج افخاری مستقل ہے۔

اس لئے روکی مقدار اتھالی مستقل قیمت $\frac{ق}{ز}$ کی طرف مائل ہوتی ہے۔

اب مثلاً فرض کرو کہ وقت ت = ۰۔ پر دور مکمل کر دیا گیا ہے، تو ج کو اس شرط سے دریافت کیا جائے کہ لا = ۰۔ جبکہ ت = ۰۔ اس سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{ق}{ز} - \frac{ق}{ز} \text{ ہوگا} \dots\dots\dots (۱۹)$$

بائیں جانب کی دوسری رقم دور کے عین مکمل کرنے کے وقت کی زائد رو کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\text{نیراگر } ق = ق \text{ جم (پت + ظم)} \dots\dots\dots (۲۰)$$

$$\text{تو فری (لا ہوگا)} = \frac{ق}{ز} \text{ ہوگا} \text{ جم (پت + ظم)}$$

اور اسکے مکمل کر کے ہوگا $\frac{ق}{ز}$ سے تقسیم کرنے پر

$$لا = ج \text{ ہوگا} + \frac{ق}{ز} \text{ ہوگا} \text{ جم (پت + ظم) فرت}$$

$$= ج \text{ ہوگا} + \frac{ق}{ز} \text{ ہوگا} \text{ جم (پت + ظم) + پل جب (پت + ظم)} \dots\dots\dots (۲۱)$$

دفعہ ۸۰ (۱۴) دیکھو۔

پس جیسے ت بڑھتا ہے رو فیل کی یکساں اتھرازی قیمت اختیار کر لیتی ہے

$$لا = \frac{ق}{مازا + پال} \text{ جم (پت + ظم - ظم)} \dots\dots\dots (۲۲)$$

$$\text{جہاں ظم} = \text{سن - اچال} \dots\dots\dots (۲۳)$$

اس لئے ذاتی مالیت ل کا اثر ہے کہ یہ رو کے حیطہ کو نسبت $\frac{ق}{ز}$ (مزید پال) میں

کم کر دیتی ہے اور ہیئت کو بطور ظہا کے پیچھے ہٹا دیتی ہے۔

۱۵۸۔ پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات۔

اب ہم پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات

$$\text{فرلا} + \text{پ ما} = \text{ق} \dots\dots\dots (۱)$$

پر غور کریں گے۔

$$(۲) \dots \dots \text{اگر ق} = \text{تو } \frac{۱}{\text{ما}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{پ} = \dots$$

اس لئے لوگ ما + ا پ فرلا = ا

$$(۳) \dots\dots\dots \text{یعنی ما ہو پ فرلا} = \text{ج} \dots\dots\dots$$

اس سے ظاہر ہے کہ ہو پ فرلا نتیجہ (۱) کا متکمل جزو ضربی ہے کیونکہ

$$\text{پ فرلا} \text{ ہو } \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{پ ما} \right) = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} (\text{ما ہو پ فرلا})$$

اس لئے مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} (\text{ما ہو پ فرلا}) = \text{ق} \text{ ہو پ فرلا} \dots\dots\dots$$

$$(۵) \dots\dots\dots \text{اور مکمل کرنے سے ما ہو پ فرلا} = \text{ق ہو پ فرلا} + \text{ج} \dots\dots\dots$$

متکمل جزو ضربی عموماً مساوات کے صرف دیکھنے سے ہی معلوم ہو سکیگا اور اوپر کے قاعدہ کی ضرورت نہیں ہوگی۔

$$\text{مثال (۱)۔} \dots\dots\dots \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما ہم لا} = ۲ \text{ جم لا} \dots\dots\dots (۶)$$

یہاں پ = مم لا، پ فر لا = لوک جب لا،
 ہو پ فر لا = جب لا

اس لئے جب لا سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فر لا} - (\text{ما جب لا}) = ۲ \text{ جب لا جم لا} \dots \dots \dots (۶)$$

$$\text{یا } \text{ما جب لا} = \text{جب لا} + \text{ج}$$

$$\text{اس لئے ما} = \text{جب لا} + \frac{\text{ج}}{\text{جب لا}} \dots \dots \dots (۸)$$

$$\text{مثال (۳) - (۱ - لا)} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{لا} = \text{ما} = ۱ \dots \dots \dots (۹)$$

(۱ - لا) کے تقسیم کرنے سے

$$\text{فر لا} - \frac{\text{لا}}{۱ - لا} = \text{ما} = \frac{۱}{۱ - لا} \dots \dots \dots (۱۰)$$

$$\text{یہاں پ} = \frac{\text{لا}}{۱ - لا}، \text{پ فر لا} = \frac{۱}{۱ - لا} \text{ لوک (لا) ہو} = ۱ - لا$$

نتیجہ (۱۰) کو مشکل جو ضربی کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{۱ - لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱ - لا}} = \text{ما} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - لا}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} (۱ - لا) = \text{ما} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - لا}} \dots \dots \dots (۱۱)$$

تکمیل کرنے سے $\sqrt{۱ - لا} = \text{ما} = \text{جب لا} + \text{ج}$

$$\text{یعنی } \text{ما} = \frac{\text{جب لا}}{\sqrt{۱ - لا}} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{۱ - لا}} \dots \dots \dots (۱۲)$$

$$\text{مثال (۳) } \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ن} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{لا}^۲ \dots \dots \dots (۱۳)$$

شکل جزو ضربی واضح ہے اور عمل یہ ہے

$$\frac{n}{\text{فرما}} + \frac{n}{\text{فرلا}} = \frac{1-n}{\text{ما}} = \frac{n+m}{\text{لا}}$$

$$\text{یا } \frac{n}{\text{لا}} = \frac{n}{\text{ما}} + \frac{n+m}{1+n+m} + \frac{n}{\text{ج}}$$

$$\text{اس لئے } \frac{n}{\text{ما}} = \frac{n}{\text{لا}} + \frac{n}{1+n+m} + \frac{n}{\text{ج}} \dots \dots \dots (۱۴)$$

۳۹۵

۱۵۹۔ قائم خطوط رقی - فرض کرو کہ واحد لاتن ای منحنیات کا ایک قبیل ہے

فما (لا، ما، ج) = ۰ (۱)
جہاں ج متبدل ہے۔ ایسے منحنیات کی مساوات دریافت کرنی ہے جو اس قبیل کو ہر جگہ زاویہ قائمہ قطع کریں۔

پہلے ہم قبیل کی تفرقی مساوات مرتب کرتے ہیں اس کے لئے (۱) کو بلحاظ لا کے تفرق کر کے ج کے ساقط کرنا چاہئے۔ دفعہ (۱۵۱) دیکھو۔
اگر دو منحنی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ قطع کریں اور اگر نقاط تقاطع پر ان کے مماس لا محور سے زاویہ مسا اور مسا بنائیں تو

$$\text{مسا} - \text{مسا} = \frac{\pi}{2}$$

اور اسلئے س مسا = س مسا
پس ایک قبیل کی تفرقی مساوات دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ کی بجائے } - \frac{1}{\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}} \text{ لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔}$$

بطریق دیگر :- اگر فرلا اور فرما قبیل (۱) کے کسی منحنی کے چھوٹے

$$\text{جزو کے ظل ہوں تو } \frac{\text{جف فرلا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}} = ۰ \dots \dots (۲)$$

پس اگر فرلا اور فرما علی القیوم منحنی کے نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنیوالے
چھوٹے سے جزو کے ظل ہوں تو $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{جف ما}}$ (۳)

اور قائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات (۱) اور (۳) میں سے ج کو ساقط
کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔
اگر منحنیات کے دو حصے ہوئے قبیل کی مساوات قطبی محدودوں میں یہ ہو

ف (ر، طما، ج) = (۴)
اور اگر منحنی اور خط رمی کے تماس سمتی نیم قطر کے ساتھ بالترتیب زاویہ
فما اور فہ بنائیں تو مذکورہ بالا طریقہ سے ظاہر ہے کہ
مس فہ = مس فما

پس ایک قبیل کی تفرقی مساوات دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات
میں $\frac{\text{فرطما}}{\text{فر}} کی بجائے - \frac{1}{\frac{\text{فر}}{\text{فرطما}}}$ لکھنے سے حاصل ہوگی۔
اب (۴) کو تفرق کرنے سے

$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ر}} \text{ فر} + \frac{1}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف طما}}} \times \text{فرطما} = \dots$ (۵)
اس لئے خط رمی کے لئے

$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ر}} \text{ فرطما} - \frac{1}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف طما}}} \text{ فر} = \dots$ (۶)

ج کو (۴) اور (۶) میں سے ساقط کرنے سے مطلوب قبیل کی تفرقی مساوات
حاصل ہوتی ہے۔

مثال (۱) قائم زاہدوں لا، ما = ج (۷)
کے قائم خطوط رمی دریافت کرو۔

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے لا، فرما + ما، فرلا = (۸)

پس خطوط رمی کے لئے لا فرلا - ما فرما = (۹)

اس لئے لا - ما = ج (۱۰)

یہ مساوات تاکم زائدوں کے قبیل کو ظاہر کرتی ہے جس کے محاور سمت میں پہلے قبیل کے متعارفوں پر منطبق ہوتے ہیں۔

مثال (۲) دائروں لا + ما + ما - ما - گ = (۱۱)

(جہاں ما تبدیل ہے) کے تاکم خطوط رمی دریافت کرو۔

تفرق کرنے سے لا فرلا + (ما + ما) فرما =

پس مری کے لئے لا فرما - (ما + ما) فرلا =

اس مساوات اور (۱۱) میں سے ما کے سا قہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۲ لا ما فرما + لا - ما - گ = (۱۲)

یا لا فرما - (ما) - ما = لا + گ (۱۳)

تابع متغیر ما کے لحاظ سے یہ خطی مساوات ہے۔ دفعہ ۱۵۸ کے ضابطہ سے

یا صرف دیکھنے سے ظاہر ہے کہ شکل ریزہ ضربی $\frac{1}{2}$ ہے۔ پس اسکی مدد سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \left(\frac{\text{ما}}{2} \right) = -1 + \frac{\text{گ}}{2}$$

اس لئے لا - ما = لا - لا + $\frac{\text{گ}}{2}$ + ۲

یعنی لا + ما - لا - لا + گ = (۱۴)

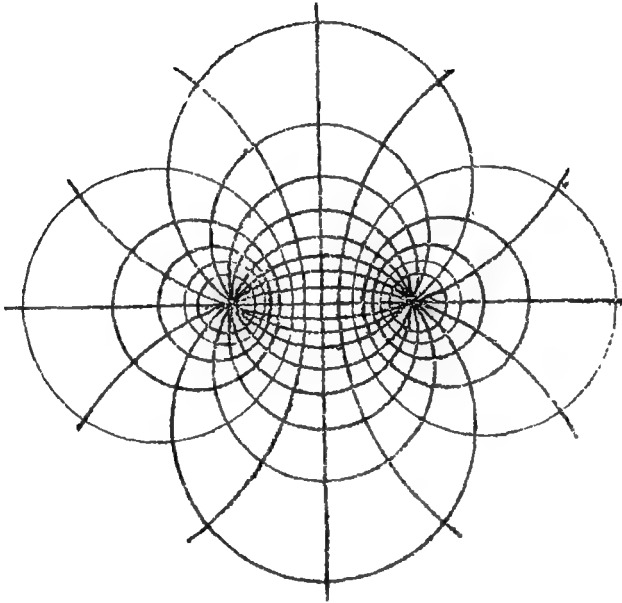
جہاں لا اختیاری ہے۔

۹۷ ابتدائی مساوات ہم محور دائروں کے ایک نظام کو ظاہر کرتی ہے جو لا محور کو

نقاط (= گ) پر قطع کرتے ہیں، خطوط رمی (۱۴) ہم محور دائروں کا

ایک دوسرا نظام ہے جس کے انتہائی نقطے، یہ نقطے ہیں۔ یعنی اگر رکھیں

لہذا = گزرتے دائرے حاصل ہوتے ہیں
 (۱۵) $(\text{گ} + \text{گ}^2) + \text{ما}^2 = \dots$
 شکل ۱۳۵ دیکھو۔



شکل (۱۳۵)

مثال (۳) دائرے $r =$ ج ج طہ (۱۶)
 مبداء میں سے گزرتے ہیں اور انکار کز ابتدائی خط پر ہے اور

فر $=$ مس طہ فرطہ (۱۷)

پس خطاری کے لئے فرطہ = مس طہ فر

یعنی فر $=$ مم طہ فرطہ (۱۸)

تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لوک (ر) = لوک جب طہ + مستقل

یا (ر) = ج جب طہ (۱۹)
یہ مساوات دائروں کے ایک دوسرے نظام کو ظاہر کرتی ہے جو مساوی میں سے
گزر رہے ہیں اور ابتدائی خط کو کس کرتے ہیں۔

۱۶۰۔ ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں -

پہلے رتبہ اور ن ویں درجہ کی عام تفرقی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$ع^{\text{ن}} + ف^{\text{ن}} ع^{\text{ن-۱}} + ف^{\text{ن-۱}} ع^{\text{ن-۲}} + \dots + ف^{\text{ن-۱}} ع + ف^{\text{ن}} = ۰$$

(۱) - - - - -

جہاں $ع = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (۲)

اور ف، ف، ف،، فن متغیروں لا، فا کے معلوم
تفاعل ہیں اور عموماً یہ مان لیا جاتا ہے کہ یہ تفاعل جبریہ اور منطقی ہیں۔
چونکہ مساوات (۱) ع میں ن ویں درجہ کی ہے، اس سے ظاہر ہے کہ
مستوی لا یا میں کے ہر مقررہ نقطہ میں سے ابتدائی منحنيات کی ن
شاخیں گزرتی ہیں۔ یہ ممکن ہے کہ ان میں سے چند شاخیں خیالی ہوں
یا لا اور فا کے خاص حدود کے لئے سب شاخیں خیالی ہوں نیز ممکن
ہے کہ ایسے نقاط کا طریق جہاں ع کی دو مساوی قیمتیں ہیں حقیقی ہو۔
تفرقی مساوات کی اعلیٰ تحقیقات میں یہ طریق خاص اہمیت رکھتا ہے۔
مثال - دوسرے درجہ کی مساوات

$ع^2 + ف^2 ع + ق = ۰$ (۳)
میں ع کی اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہونگی یا منطبق یا خیالی بموجب اسکے کہ
ف، ق، ق - اور ع کی دو مساوی قیمتوں کے نقاط کا طریق

منفی ف^۲ = م^۲ ق ہوگا۔
 اگر (۱) کا دایاں رکن، بلحاظ ع کے خطی اجزاء میں تحویل ہو سکے تو
 (ع - ع_۱) (ع - ع_۲) (ع - ع_۴) = (ع - ع_۵) (۴)
 جہاں ع_۱، ع_۲، ع_۳، ع_۴ متغیروں لا، ما کے معلومہ تفاعل ہیں۔
 مکمل حل ذیل کی جداگانہ مساواتوں کے حل کا مجموعہ ہوگا:-

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \dots \dots (۵)$$

 مثال:- لا ما ع - (لا - ما) ع - لا ما = (۶)
 یہ اس کے معادل ہے
 (لا ع + لا) (ما ع - لا) = (۷)
 اور لا ع + ما = (لا ع - لا) کے حل بالترتیب ہیں
 لا ما + ج = (لا - ما) ج = (۸)
 (۶) سے دو ہوئی ج کی دو قیمتوں کا حاصل ضرب (-۱) ہے اس سے
 ظاہر ہے کہ کسی قدر لا، ما میں سے گزرنیوالے ابتدائی تخفیات کی دو شاخیں
 ایک دوسرے پر علی القواہم ہیں۔ دفعہ ۱۵۹ کی مثال (۱) دیکھو۔

۱۶۱۔ کلیدی صورت -

جب دفعہ ۱۶۰ کی مساوات (۱) آسانی سے خطی اجزاء میں تحویل نہ ہو سکے
 تو خاص صورتوں میں اور طریقے استعمال کئے جاسکتے ہیں، لیکن ان
 طریقوں کا استعمال بہت محدود ہے اور اس لئے انہیں یہاں بحث
 میں نہیں لایا جائیگا۔ مگر کلیدی صورت کو اس سے مستثنیٰ کیا جائیگا
 کیونکہ اس کا اصول بہت سادہ ہے اور ایسے تخفینوں کی صورت میں خطی
 تعریف کسی عامی نہایت کی بنا پر کی گئی ہو، شکل الترمید ہوتی ہے۔
 اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی بجائے ع لکھیں تو زیر طور صورت ہوگی

ما = لا + ع + ف (ع) (۱)
 دفعہ ۶۰ میں ثابت کیا گیا ہے کہ مخفی کے ماس کے مقطوعے لا اور ما
 محوروں پر عہا، بیہا ہوں تو

عہا = $\frac{لا - ع - ما}{ع}$ اور بیہا = فا - لا ع (۲)

پس (۱) کی صورت کی مساوات کسی ایک مقطوعہ اور ماس کی
 سمت میں ربط یا دونوں مقطوعوں میں ربط کو ظاہر کرتی ہے*
 اب ظاہر ہے کہ کسی خط مستقیم کی مساوات جبکہ مقطوعوں میں دیا ہوا
 رشتہ ہے مذکورہ بالا ربط کو پورا کر کے گی۔ ایسے خط کے ہر نقطہ پر

ع = ج (۳)
 اور اس لئے حل ہے

ما = ج + لا + ف (ج) (۴)
 جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

لیکن اس مساوات کو وہ مخفی بھی پورا کرے گا جس کے ماس، قبیل
 (۴) کے خطوط ہیں یعنی بہ الفاظ دیگر وہ مخفی جو اس قبیل کا لفاف ہے۔
 لفاف کی مساوات اس شرط سے حاصل ہوتی ہے کہ ج میں مساوات
 (۴) کی دو اعلیٰں برابر ہیں یعنی (۴) اور

لا + ف (ج) = (۵)
 میں ج کو ساقط کرنے سے لفاف کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

دفعہ ۱۳۹ دیکھو۔
 مذکورہ بالا حل کو دریافت کرنیکا عام طریقہ یہ ہے کہ مساوات (۱)
 کو لمجاظ لا کے تفرق کیا جائے۔

[*: مساوات معادل ہے بیہا = ف (- $\frac{بیہا}{عہا}$) یا فہا (عہا، بیہا) = ۰ کے]

پس $ع = \frac{ع}{\frac{ع}{ع}} = ع + [ع + (ع)] \frac{ع}{ع}$

اس لئے $[ع + (ع)] \frac{ع}{ع} = \dots\dots\dots (۶)$

اس لئے ضروری ہے کہ $\frac{ع}{ع} = \dots\dots\dots (۷)$

یا $ع + (ع) = \dots\dots\dots (۸)$
(۷) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$ع = ع$ اور اس لئے $ع = ع + [ع + (ع)] \dots\dots\dots (۹)$

دوسرے نتیجہ (۸) اور (۱) میں سے ع کو ساقط کرنے سے $ع$ اور $ع$

میں ایک خاص ربط حاصل ہوتا ہے جو تک (۱) اور (۸) میں سے ع

کا حاصل اسقاط وہی ہے جو (۳) اور (۵) میں سے ع کا ہے اسلئے

دوسرا حل مذکورہ بالا لواف ہو گا۔

حل (۹) جس میں ایک اختیاری مستقل ع ہے مکمل ابتدائی

کہلا تا ہے۔ دوسرا حل یعنی لوافی حل مکمل ابتدائی میں شامل نہیں ہے

یعنی ع کو کوئی خاص قیمت دینے سے یہ حاصل نہیں ہو سکتا اس لئے

اس کو نادر حل کہتے ہیں۔

مثال :- ایسے منحنی دریافت کرو جن کا پائیں منحنی بلحاظ نقطہ (۰، ۰) کے جس کو

قطب مانا جائے (۰، ۰) ہو۔

اس خاصیت کا اظہار $ع = ع + ع$ ہے۔ جہاں ب، محور ماپر منقطع ہے۔

اس لئے $ع = ع + ع + \dots\dots\dots (۱۰)$

ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساوات کے نادر حل کا عام نظریہ

تفرقی مساوات کی خاص کتابوں میں مل سکتا ہے۔

لواف کے نظریہ سے اسکو خاص تعلق ہے اگرچہ یہ استقدر وسیع نہیں ہے [

اور اسکا حل خطوط کا قبیل

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{1}{ج} + ج لا = ما$$

ہے۔ نیز لغاف $ما^۲ = ۱۴ لا$ (۱۲)
بھی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ دفعہ ۱۴۰ مثال (۲) دیکھو۔

امثلہ ۵ (تفرقی مساوات کی تکنوین)

$$(۱) اگر ما = (لا + جب) تو ثابت کرو کہ لا \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{فر ما}{فر لا} =$$

$$(۲) اگر ما = (لا + جب) لا تو ثابت کرو کہ \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{۲}{لا} \frac{فر ما}{فر لا} + \frac{ما^۲}{لا} =$$

$$(۳) اگر ما = (هو + جب) لا تو ثابت کرو کہ \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{گک ما}{لا} =$$

$$(۴) اگر ما = (هو + جب) لا تو ثابت کرو کہ$$

$$\frac{فر ما}{فر لا} - (علا + بی) \frac{فر ما}{فر لا} + علا بی ما =$$

$$(۵) اگر ما = (لا + جب لا) هو تو ثابت کرو کہ \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{گک ما}{لا} =$$

$$+ گک ما =$$

$$(۶) اگر لا = هو - \frac{۱}{۴} گک (اجم ن ت + جب جب ن ت) تو ثابت کرو کہ$$

$$\frac{فر لا}{فر ت} + گک \frac{فر لا}{فر ت} + (ن + \frac{۱}{۴} گک) لا =$$

$$(۷) \text{ اگر } \frac{۱}{ر} = \text{ب} + \text{تو ثابت کرد که } \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{فر} = \frac{۲}{ر} \text{ فر}$$

$$(۸) \text{ اگر } \frac{فر}{ر} = \text{ل} + \text{ب} + \text{تو ثابت کرد که } \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{فر} = \frac{۱}{ر} \text{ فر}$$

$$(۹) \text{ اگر } \frac{فر}{ر} = \frac{فر + \text{ب} + \text{تو ثابت کرد که}}{ر}$$

$$\frac{فر}{فر} + \frac{۲}{ر} \text{ فر} - \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$(۱۰) \text{ اگر } \frac{فر}{ر} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ک} + \text{ل} + \text{تو ثابت کرد که}}{ر}$$

$$\frac{فر}{فر} + \frac{۲}{ر} \text{ فر} + \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$(۱۱) \text{ اگر } \frac{فر}{ر} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ک} + \text{ل} + \text{تو ثابت کرد که } \frac{فر}{فر} + \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$\frac{فر}{فر} + \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$(۱۲) \text{ اگر } \frac{فر}{ر} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ک} + \text{ل} + \text{تو ثابت کرد که } \frac{فر}{فر} + \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$\frac{فر}{فر} + \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$(۱۳) \text{ اگر } \frac{فر}{ر} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ک} + \text{ل} + \text{تو ثابت کرد که } \frac{فر}{فر} + \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$+ \frac{فر}{فر} + \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$\frac{فر}{فر} + \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$(۱۴) \text{ اگر } \frac{فر}{ر} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ک} + \text{ل} + \text{تو ثابت کرد که } \frac{فر}{فر} + \frac{فر}{ر} + \frac{فر}{ر} = \text{ک} \text{ فر}$$

$$(۱-لا^۲) \frac{فرما^۲}{فرلا} - لا \frac{فرما}{فرلا} = ۰$$

(۱۵) اگر ما = (جب لا) + (جب لا) + جب تو ثابت کرو کہ

$$(۱-لا^۲) \frac{فرما^۲}{فرلا} - لا \frac{فرما}{فرلا} = ۲$$

(۱۶) اگر ما = (جم (لوک لا) + جب (لوک لا) تو ثابت کرو کہ

$$لا^۲ \frac{فرما^۲}{فرلا} + لا \frac{فرما}{فرلا} + ما = ۰$$

(۱۷) اگر ما = { لا + لا - لا } + { لا - لا - لا } + جب { لا - لا - لا } +

$$تو ثابت کرو کہ (لا - لا^۲) \frac{فرما^۲}{فرلا} + لا \frac{فرما}{فرلا} - ن^۲ ما = ۰$$

(۱۸) ثابت کرو کہ ابتدائی ما = م لا + م سے جہاں م اختیاری ہے

$$تفرقی مساوات لا (\frac{فرما^۲}{فرلا}) - ما \frac{فرما}{فرلا} + ۱ = ۰ \text{ حاصل ہوتی ہے}$$

(۱۹) اگر ۲ ج ما + ج = لا جہاں ج اختیاری ہے تو ثابت کرو کہ

$$لا (\frac{فرما^۲}{فرلا}) - ۲ ما \frac{فرما}{فرلا} - لا = ۰$$

(۲۰) ثابت کرو کہ ان مکافیوں کی تفرقی مساوات جگے محاور ما محور کے

$$\text{متوازی ہیں } \frac{فرما^۳}{فرلا^۳} = ۰ \text{ ہے۔}$$

(۲۱) ثابت کرو کہ ان تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات جگے محاور متساوی ہو
لا پر منطبق ہوتے ہیں

$$\text{ما} \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} + \left(\frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}} \right)^2 = ۰ \text{ ہے}$$

(۲۲) ثابت کرو کہ ان تمام مخروطیوں کی تفرقی مساوات جن کے صدری محور محدودوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں

$$\text{لا} \text{ما} \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} + \left(\frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}} \right)^2 - \text{ما} \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} = ۰ \text{ ہے}$$

(۲۳) محور لا کو مبدأ پر مس کرنے والے تمام دائروں کی تفرقی مساوات

$$\text{فر} \text{ما} = \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{لا}^2 - \text{ما}^2}$$

(۲۴) ثابت کرو کہ ان تمام مخروطیوں کی تفرقی مساوات جو محور ما کو مبدأ پر مس کرتے ہیں اور جن کے مرکز محور لا پر ہیں

$$\text{لا}^2 \text{ما} \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} + \left(\frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}} - \text{ما} \right)^2 = ۰ \text{ ہے}$$

(۲۵) اگر $\frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا} (1 - \text{ما}) \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} = \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} + \left(\frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}} \right)^2 + (1 - \text{ما}) \frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}}$$

(۲۶) ثابت کرو کہ ان تمام دائروں کی تفرقی مساوات جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں اور جن کے متقارب محددوں کے محوروں کے متوازی ہیں

$$\text{لا} \text{ما} \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} - \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} + \left(\frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}} \right)^2 + \text{ما}^2 \frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}} = ۰ \text{ ہے}$$

(۲۷) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} + \text{ن}^2 \text{ما} = \text{ف} (\text{ت})$ کو ربط

$$\text{ما} = \frac{1}{\text{ن}} \text{جب ن ت ف (ت) جم ن ت فرت}$$

$$- \frac{1}{\text{ن}} \text{جم ن ت ف (ت) جب ن ت فرت}$$

پورا کرتا ہے اور یہی اُس کا مکمل مل ہے۔

امثلہ ۵۱

(رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں)

$$(۱) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \text{ تنجمل کرو } [\text{ما} = \text{ج لا}]$$

$$(۲) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \text{ کو جمل کرو } [\text{ما} = \text{ج} \frac{\text{لا}-۱}{۱+\text{لا}}]$$

$$(۳) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{مما لا}}{\text{مما لا}} \text{ تنجمل کرو } [\text{جب لا جم ما} = \text{ج}]$$

$$(۴) \quad \text{لا}^۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۱ \text{ تنجمل کرو } [\text{ما} = ۱ + \text{ج} \frac{۱}{\text{لا}}]$$

$$(۵) \quad \text{م (ما + ب) (فرلا + ن) (لا + ۱) فرما} = \text{کو مل کرو } \text{م (لا + ۱) (ما + ب) (ج = ت)}$$

$$[\text{م (لا + ۱) (ما + ب) (ج = ت)}]$$

$$(۶) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} + ۱}{\text{لا} + ۱} \text{ کو مل کرو } [\text{ما} = \frac{\text{لا} + \text{ج}}{۱ - \text{ج لا}}]$$

$$(۷) \quad (۱ + \text{ما}) (\text{فرلا} - \text{لا ما}) (۱ + \text{لا}) \text{ فرما} = \text{کو مل کرو } (۱ + \text{لا}) (۱ + \text{ما}) (\text{ج} = \text{لا}^۲)$$

$$[\text{ج} = \text{لا}^۲] \text{ (۱ + لا) (۱ + ما) (ج = لا}^۲\text{)}$$

$$(۸) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} (۱ - \text{لا})}{\text{لا} (۱ - \text{لا})} \text{ کو مل کرو } [\text{ما} (۱ - \text{لا}) = \text{ج لا} (۱ - \text{ما})]$$

$$(۹) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (لا + ما)^۲ \text{ کو مل کرو } [(لا + ما) = \text{مس (لا + عس)}]$$

$$(۱۰) \quad (لا + ما)^۲ (لا + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ما) = ۱ \text{ کو مل کرو } -$$

(۱۱) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں حماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان کا زاویہ سمتی زاویہ طہا کا نصف ہو۔

[صنوبری $r = ۱$ (۱-جم طہا)]

(۱۲) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں میدا سے حماس پر کا عمود نقطہ تماس

کے فضلہ کے مساوی ہو۔ [دائرے $r = ۲$ (۲-جم طہا)]

(۱۳) ایسے منحنی دریافت کرو جن کے حماس کا وہ حصہ جو محد دوں کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہو جائے۔

[زائد لا $ما = ج$]

(۱۴) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں زیر حماس فضلہ کے متناسب ہے۔

[$ما = ج$ لا ۳]

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر کسی منحنی میں زیر عماد کو فضلہ سے مستقل نسبت ہو تو یہ منحنی ایک مخروطی تراش ہوگی۔

(۱۶) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں معین کے قدم سے اگر حماس پر عمود کھینچا

جائے تو اس کا طول مستقل (۱) ہو۔ [زنجیرے $ما = ۱$ (۱-جم $\frac{۱}{۱}$)]

(۱۷) ایسے منحنی دریافت کرو جن کا قطبی زیر حماس مستقل (۱) ہے۔

[$r = ۱$ (طہا-۱)]

(۱۸) وہ منحنی دریافت کرو جن میں قطبی زیر عماد مستقل ہو [$r = ۱$ (طہا-۱)]

(۱۹) وہ منحنی دریافت کرو جن کے کسی دو معینوں کا درمیانی رقبہ، منقطعہ عد قوس

کے متناسب ہو۔ [زنجیرے $ما = ۱$ (۱-جم $\frac{۱}{۱}$)]

(۲۰) ایسے منحنی دریافت کرو جن کے کسی معین $ما$ محور (۱) اور منحنی سے گھرا ہوا

رقبہ، معین اور متناظر فضلے کے حاصل ضرب کا $ن$ وال حصہ ہو۔

[$ما = ج$ لا $۱-۱$]

۴۰۵

(۲۱) ایسے گردششی مجسم کی شکل دریافت کرو جس کے کسی عمودی مقطوع کا حجم تراش کے رقبہ اور محور کے طول کے مثل ضرب کان واں حصہ ہے۔

(۲۲) ایک یکساں طاقت والی لگی ہوئی سلاح میں عمودی تراش کا اقبہ (مس) اس میں کے کل زور کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ اگر لا انتصایا پیچھے کی طرف ناپا جائے تو مس اور لا میں رشتہ ذیل کی شکل کا ہے۔

$$س = ل - جب ل میں فرلا$$

پس ثابت کرو کہ سلاح کی شکل اس گردششی مجسم کی سی ہوگی جو

$$ما = جب قو ل کے منحنی کو محور لا کے گرد گھمانے سے حاصل$$

ہوتی ہے۔

(۲۳) ایسے منحنی کی شکل دریافت کرو جو بلحاظ محور لا کے تشاکل ہے اور جس میں کسی دگنے معین سے کٹے ہوئے رقبہ کا اوسط مرکز معین سے محور کے

$$طول کے $\frac{1}{2}$ فاصلے پر ہو۔ [ما = ج لا $^{۲-۵}$]$$

سوالات ۲۴ تا ۳۲ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$(۲۴) (لا^۳ + ۳ لا^۲ ما^۲) فرلا + (ما^۳ + ۳ لا^۲ ما) فرما = -$$

$$(۲۵) لا فرلا + ما فرما = ل \frac{لا فرما - لا فرلا}{لا^۲ + ما^۲}$$

$$[لا + ما^۲ = ل^۲ مس^۲ \frac{ما}{لا} + ج]$$

$$(۲۶) لا \frac{فرما}{فرلا} - ما = ل \frac{لا}{لا^۲ + ما^۲} [ما = لا جنس \frac{لا-۱}{ل}]$$

$$(۲۷) لا \frac{فرما}{فرلا} - ما = ل \frac{لا}{لا^۲ + ما^۲}$$

تفرقی مساوات اور اس کے ابتدائی کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

$$[لا^2 = ج^2 + ما^2]$$

$$[لا(ما + لا) = ج]$$

$$[لا(ما = ج) = ج]$$

$$[ما = ج - لا]$$

$$[لا(ما = ج) = ج]$$

$$\frac{فرما}{لا(لا^2 - ما^2)} = \frac{فرلا}{لا^2 - ما^2}$$

$$\frac{لا(فرما)}{لا^2 - ما^2} = \frac{ما = لا}{لا^2 - ما^2}$$

$$\frac{لا(فرما)}{لا^2 - ما^2} = \frac{ما = لا}{لا^2 - ما^2}$$

$$\frac{فرما}{لا(لا + ما)} = \frac{ما(لا + ما)}{لا(لا - ما)}$$

$$(لا^2 - ما^2) لا(لا + ما) = (لا^2 - ما^2) ما(لا + ما)$$

$$[(لا^2 + ما^2) = ج]$$

$$\frac{لا + ب + ما + ج}{لا + ب + ما + ج} = \frac{فرما}{فرلا}$$

ثابت کرو کہ مساوات

$$لا + ب + ما + ج = ضہا اور لا + ب + ما + ج = ح$$

$$ثابت کرو کہ \frac{فرما}{فرلا} = ف (لا + ب + ما) کی صورت کی مساوات$$

ابال لا + ب + ما = می سے حل کیا جاسکتی ہے۔

بتاؤ کہ ذیل کی صورت کی مساوات کو کس طرح حل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{فرما}{فرلا} = ف (لا + ب + ما + ج)$$

امثلہ ۵۲

خطی مساوات

سوالات آتا کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ماس لا} = \text{قط لا} \quad [\text{ما} = \text{جب لا} + \text{ج جم لا}]$$

$$(۲) \quad (۱ - \text{لا}^۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا ما} = ۱ \text{ لا} \quad [\text{ما} = ۱ + \text{ج} - ۱ - \text{لا}^۲]$$

$$(۳) \quad \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا} + \text{ما} = ۰ \quad [\text{لا}^۲ + ۲ \text{لا ما} = \text{ج}]$$

$$(۴) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ما}}{۱} = ۱ \quad [\text{لا}^۲ - ۲ \text{لا ما} = \text{ج}]$$

$$(۵) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲ \text{لا ما} = ۱ + ۲ \text{لا}^۲ \quad [\text{ما} = \text{لا} + \text{ج} - \text{لا}^۲]$$

$$(۶) \quad \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{۱ - \text{لا}^۲}{۲ \text{لا} + ۱} \text{ما} = ۱$$

$$(۷) \quad ۱ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱ \text{ع مس طما} = \text{مس طما} \quad [۱ \text{ع} = ۱ + \text{ج جم طما}]$$

$$(۸) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ماس لا} - ۲ \text{جب لا} \quad [\text{ما} = \text{جم لا} + \text{ج قط لا}]$$

$$(۹) \quad (۱ - \text{لا}^۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (\text{لا}^۲ - ۱) \text{ما} = \text{لا}^۳$$

$$[\text{ما} = \text{لا} + \text{ج لا} - ۱ - \text{لا}^۲]$$

$$(۱۰) \quad \text{ثابت کرو کہ مساوات} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف ما} = \text{ق ما}$$

بدال ما - (۵-۱) ی سے مٹائی جاسکتی ہے

[پر فوری کی مساوات]

(۱۱) حل کرو $\frac{لا فرما}{فر لا} + ما = ما لوک لا$ $\left[\frac{۱}{ما} = ۱ + لوک لا + ج لا \right]$

(۱۲) حل کرو جم لا $\frac{لا فرما}{فر لا} - ما جب لا + ما =$ $\left[\frac{۱}{ما} = جب لا + ج جم لا \right]$

(۱۳) اگر گناش (گ) والے کھنڈے کی دونوں تختیوں کو ایسے تار سے ملا دیا جائے جسکی فراجمت (نر) ہے اور ذاتی امالہ کی شرح صفر ہے تو برقی یار (جکم) اور قوت محرکہ برقی (ق) میں ذیل کا رشتہ ہے۔

$$ق = نر \frac{فر جبکھا}{فر ت} + \frac{جکھا}{ج}$$

اس مساوات کو تکمیل کرو جبکہ $ق = ۰$ ، $ق = مستقل$ ،
 $ق = ق - جم (پ + ص)$

امثلہ ۵۳

علی القوائم خطوط رمی

(۱) خطوط $ما = ج$ لاکے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔

(۲) مخنیات $۱ - ما = لا$ کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔
 [دائرے $لا + ما = ج$]

(۳) دائروں $لا + ما = ج$ کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔
 [خطوط $لا + ما = ج$]

(۴) کن مخنیات کے لئے $\frac{فر ما}{فر لا} = \frac{ما + ۳ لا + ما}{لا + ۳ لا + ما}$ نیز ان کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔

[$لا - ما = ۲$ ج لا ما] [$لا + ۱ لا + ما + ما = ج$]

(۵) ثابت کرو کہ ہا سکہ مکافیوں $ما^۲ = ۴ (لا + لا)$ کی تفرقی مساوات ہے

$$ما^۲ + ۲ (لا - ع) - ما^۲ = ۰ \text{ جہاں } ع = \frac{فرما}{فرلا}$$

ثابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔ اور اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر تیار کرو۔

(۶) ثابت کرو کہ ہم ہا سکہ مخروطیوں $\frac{لا^۲}{لا + ۲} + \frac{ما^۲}{ب + ۲} =$ کی تفرقی مساوات

$$لا (ما^۲ + ع) + (لا^۲ - ما^۲) (لا + ۲) - ع (لا + ۲) = ۰ \text{ ہے۔}$$

ثابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔ اور نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۷) قائم زائد قطعات کا ایک نظام ثابت تقضوں $(\pm لا، ۰)$ میں سے گزرتا ہے اور ان کا مرکز میداع پر ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے علی القوائم خطوط بی کیسینی کے بیضوی ہیں

$$(لا + ما^۲) = ۲ (لا^۲ - ما^۲) + ج$$

(۸) ثابت کرو کہ مکافی $ما^۲ = ۴ (لا + لا)$ کے درجوں کی تفرقی مساوات ہے

$$لا + ما^۲ = \frac{فرما}{فرلا} + لا \left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^۲ = ۰$$

(۹) ثابت کرو کہ دائرہ $لا^۲ + ما^۲ = لا^۲$ کے درجہ کی تفرقی مساوات ہے

$$لا^۲ - لا^۲ + ۲ لا ما^۲ = \frac{فرما}{فرلا} + (لا^۲ - ما^۲) \left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^۲ = ۰$$

(۱۰) خطوط صنوبری $لا = (۱ - جم طم)$ کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو

[صنوبری $لا = جب (۱ + جم طم)$

(۱۱) ثابت کرو کہ شخنیات $لا = (۱ + جم م طم)$ کے علی القوائم خطوط رمی

$$لا = جب م طم \text{ ہیں۔}$$

خاص صورتوں $۴ = ۱ - ۱ - ۲ - ۲ - ۱ - ۱$ میں نتیجہ کی ہندسی

تعبیر بتاؤ۔

(۱۲) ثنابت کرو کہ منحنیات $ر' = اجم طہ$ کے علی القوائم خطوط رمی

$ر = ب جب ا طہ$ ہیں۔

(۱۳) اگر دو قطبی محدودوں میں (دفعہ ۱۳۲) منحنیات کے قبیل کی مساوات

ف (ر' ر) = ج ہو تو ثنابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات

$ر جب ف فر طہ = ر جب ف فر طہ$ ہوگی۔

پس دکھاؤ کہ دائرے $ر = ج$ کے علی القوائم خطوط رمی دوسرے

دائرے $طہ + طہ = ج$ ہیں۔

(۱۴) ثنابت کرو کہ کیسینی کے بیضوی $رر = ج$ کے علی القوائم خطوط

رمی قائم زائد $طہ - طہ = ج$ ہیں۔

(۱۵) ثنابت کرو کہ ہم توہ منحنیات $ر - ر = ج$ کے علی القوائم

خطوط رمی متناطیسی منحنیات $جم طہ + جم طہ = ج$ ہیں۔

امثلہ ۵۴

(اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں)

سوالات آتا۔ اکی تفسر فی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱) \left(\frac{فر ما}{فر لا} \right)^2 - (عہ + بہ) = \frac{فر ما}{فر لا} + عہ بہ =$$

$$[ما = عہ لا + ج' ما = بہ لا + ج]$$

$$(۲) \left(\frac{فر ما}{فر لا} \right)^2 = جب ا لا [ما = ج ± جم لا]$$

$$(۳) \quad \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = {}^2\text{ما} \quad [\text{ما} = \text{ج} \pm \text{قو}^3]$$

$$(۴) \quad \text{ما}^2 \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = {}^2\text{ر} \quad [\text{ما}^2 = \text{ج} \pm {}^2\text{رلا}]$$

$$(۵) \quad \text{لا} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = {}^2\text{ا} \quad [\text{ما} = \text{ج} \pm {}^2\text{رلا}]$$

$$(۶) \quad (1 - \text{لا}^2) \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = {}^2\text{ا} \quad [\text{ما} = \text{ج} \pm \text{جب}^2\text{لا}]$$

$$(۷) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} \right) = \text{لا} (\text{لا} + \text{ما})$$

$$[\text{ما} = \frac{1}{4} (\text{لا}^2 + \text{ج}^2 \text{ما}^2 - \text{ا}^2 + \text{ج} \text{قو}^2)]$$

$$(۸) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا} \right) = \text{ما} (\text{لا} + \text{ما})$$

$$[\text{ما} = \text{ج} \text{قو}^2 \text{ما} = 1 - \text{لا} + \text{ج} \text{قو}^2]$$

$$(۹) \quad \text{لا} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 - {}^2\text{ر} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا} = 0 \quad [\text{لا}^2 = \text{ج}^2 \text{ما} + \text{ج}^2]$$

$$(۱۰) \quad \text{ما} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 + {}^2\text{ر} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = 0 \quad [\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}^2 \pm \text{لا}]$$

(۱۱) ایسے منحنی دریافت کرو کہ محدودوں کے محوروں کے تماس کے مقطوعوں کا

حاصل ضرب مستقل ک کے مساوی ہو۔ [زائد ${}^2\text{رلا} = \text{ما} = \text{ک}^2$]

(۱۲) ایسے منحنی دریافت کرو کہ میداء سے کسی تماس پر عمود ا کے مساوی

ہو۔ [دائرے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$]

$$(۱۳) \quad \text{حل کرو} \quad \text{ما} = \text{لا} \text{ع} + \sqrt{\text{ب}^2 + \text{ا}^2 \text{ع}^2} \quad [\text{نادرعل} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1]$$

(۱۴) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نقطوں $(\pm \text{ج}, -)$ سے کسی تماس پر عمودوں کا

حاصل ضرب ب' کے مساوی ہو۔ [مخروطات $\frac{لا^۲}{ب'ج} + \frac{ما^۲}{ب'ج} = ۱$]

$$[ج - ب' = \frac{لا^۲}{ب'ج} - \frac{ما^۲}{ب'ج} = ۱]$$

(۱۵) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نقاط $(\pm ۱, ۰)$ کے سینوں پر تماس جو حصے کاٹتا ہے ان کا حاصل ضرب ب' کے مساوی ہو۔

$$[مخروطیاں $\frac{لا^۲}{ب'ج} \pm \frac{ما^۲}{ب'ج} = ۱$]$$

(۱۶) حل کرو $ما = لا + ع + ۱$ (ع - ۱)

$$[نادر حل (لا + ۱) = ۲ = ۱ + ما]$$

(۱۷) حل کرو $(لا - ۱) + ع + ۱ = (لا - ما) + ع - ما = ۰$

$$[نادر حل (لا + ما) = ۲ = ۱ + ما]$$

(۱۸) ایسے منحنی دریافت کرو کہ محدودوں کے محوروں پر تماس کے نقطوں کا

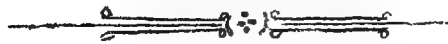
حاصل جمع ۱ کے مساوی ہو۔ [مکافی $(لا - ما) + ۲ = (لا + ما) + ۱ = ۱$]

(۱۹) ثابت کرو کہ $لا + ما = \frac{فرما}{فرلا} = ف$ (فرما $\frac{فرما}{فرلا}$) کی قسم کی تفرقی مساوات

متوازی منحنیات کے ایک نظام کو ظاہر کرتی ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ $ف$ (لا، ما، ع - $\frac{۱}{ع}$) کی قسم کی تفرقی مساوات

قائم منحنیات کے دو نظاموں کو ظاہر کرتی ہے۔



بارہواں باب

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۱۶۲۔ نمونہ $\frac{فر۱}{فر۲} = ف (لا)$ کی مساواتیں۔

یہ باب زیادہ تر دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتوں کے لئے مخصوص ہے اور اس میں خصوصاً ایسے نمونہ کی مساواتوں پر غور کیا جائے گا جو احصاء کے ہندسی اور طبیعی اطلاقات میں عموماً کام آتی ہیں۔ بعض صورتوں میں اعلیٰ رتبہ کی مساواتوں کے لئے ان طریقوں کی توسیع ہو سکتی ہے۔ پہلے اہم چند خاص صورتوں پر غور کریں گے اور پھر دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات پر مستقل سروں والی ت۔ دیں رتبہ کی عام خطی مساوات پر اس کے باب میں بحث کی جائے گی۔

سب سے پہلے صورت $\frac{فر۱}{فر۲} = ف (لا) \dots (۱)$ پر غور کرو۔ اسکو حل کرنے کے لئے بلحاظ لا کے صرف دو سادہ متکملوں کی ضرورت ہے۔

$$یعنی \quad \frac{فر۱}{فر۲} = ف (لا) + (لا) + ا$$

$$اور \quad م = ف [ف (لا) + فر۱] + (لا) + ب \dots (۲)$$

جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

مثال (۱)۔ حرکتی مساوات $\frac{فرٲا}{فرٲا} = ف (ت)$ (۳)

ایک ذرہ کی ایسی خطی حرکت کو بیان کرتی ہے جس میں قوت، وقت کا معلوم تفاعل ہے۔ یہ مساوات مذکورہ بالا صورت کی ہے صرف تعین میں ذرا سا فرق ہے مستقل اسراع (ج) والے ذرہ کی صورت میں مساوات ہے

$$(۴) \quad \frac{فرٲا}{فرٲا} = ج$$

اس لئے $\frac{فرٲا}{دٲ} = ج + ا$

اور $\frac{۱}{۲} ج + ا + ت + ب$ (۵)

پیزاگر $\frac{فرٲا}{فرٲا} = گ$ جب ن ت (۶)

یعنی قوت، وقت کا سادہ موسیقی تفاعل ہے تو

$$\frac{فرٲا}{فرٲا} = - \frac{گ}{ن} جم ن ت + ا$$

اور $\frac{ک}{ن} = -$ جب ن ت + ا + ب (۷)

اس سوال کے مستقالات ا اور ب اس شرط سے مقرر کئے جاسکتے ہیں کہ کسی خاص آن پر ذرہ دے ہوئے مقام پر ہوا اور اس کی رفتار کسی دی ہوئی مقدار کے مساوی ہو۔

مثال (۲)۔ مساوات ب $\frac{فرٲا}{فرٲا} - و (ل) =$ (۸)

کا ایسا حل دریافت کرو جو ذیل کی شرائط کو پورا کرے۔

$$ل = \frac{ک}{فرٲا} = ما =$$

در اصل یہ سوال ایک ایسی سلاخ کے خم دریافت کرنے کا ہے جس کا ایک سر لا = . انہی وضع میں جکڑ دیا گیا ہے اور دوسرے سر سے لا = ل سے معلوم وزن (۹) لٹک رہا ہے۔

(۸) کو دو مرتبہ متواتر تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب فرما} = \frac{\text{و ر ل لا} - \frac{1}{4} \text{لا}^2}{\text{فر لا}} + \text{ا}$$

اور ب ما = و د ل لا - $\frac{1}{4} \text{لا}^2 + \frac{1}{4} \text{لا}^2 + \text{ا لا} + \text{ج} \dots \dots (۹)$
جہاں ا اور ج اختیاری ہیں۔

اور حدودی شرائط سے حاصل ہوتا ہے کہ ا = - اور ج = ۰

$$\text{اس لئے ما} = \frac{1}{4} \frac{\text{و ر ل لا} - \frac{1}{4} \text{لا}^2}{\text{فر لا}} \dots \dots (۱۰)$$

$$۱۶۳ - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف (ما)} \text{ کے نمونہ کی مساواتیں۔}$$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف (ما)} \dots \dots (۱)$$

کے نمونہ کی مساوات کا پہلا تکملہ دو طریقوں سے حاصل ہو سکتا ہے۔
پہلے طریقہ میں دونوں جانب کو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ سے ضرب دیکر لمبا ط لا کے

تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \text{ (فر ما)} = \text{ف (ما)} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{4} \text{ (فر ما)} = \text{ف (ما)} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ا}$$

$$= \text{ف (ما)} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ا} \dots \dots (۲)$$

۴۱۳ دوسرے طریقہ میں فرما کے لئے علامت (ع) رکھو، چونکہ

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} \dots\dots (۳)$$

اس لئے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} = \text{ف (ما)} \dots\dots\dots (۴)$$

یہ تابع متغیر ع اور متبوع متغیر ما میں پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے۔
(۴) کو لحاظ ما کے مکمل کرنے سے

$$\frac{۱}{\text{ع}} = \text{ف (ما)} + \text{فرما} \dots\dots\dots (۵)$$

۴۱۴ یہ (۲) کے معادل ہے۔
مکمل کرنے کے لئے (۲) کو ذیل کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{۲}{\text{ف (ما)}} + \text{فرما} = \pm \text{فرلا} \dots\dots\dots (۶)$$

یہاں متغیر الگ الگ ہیں (دفعہ ۱۵۴) لیکن نسب نما میں جذر کی موجودگی کی وجہ سے تفاعل ف (ما) کی آسان شکلوں کے لئے بھی اس کو مکمل کرنا دشوار ہوتا ہے۔

اس مساوات کی ایک ضروری شکل وہ ہے جس میں ف (ما) متغیر ما کا خطی تفاعل ہو، یہ مساوات اس شکل کی ہوگی

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ب} = \text{ا} \dots\dots\dots (۷)$$

تابع متغیر ما کی بجائے ا + $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ لکھ کر بعد میں ا کا آخری نشان نکال دینے سے مساوات (۷) آسان تر شکل

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} + \text{ز} \text{ما} = \dots \dots \dots (۸)$$

میں تحویل ہو جاتی ہے۔

$$\text{اس کا پہلا ٹکڑا ہے } \left(\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} \right) + \text{ز} \text{ما} = \text{ج} \dots \dots \dots (۹)$$

اگر مثبت ہے تو لکھو $\text{م} = \text{م} \text{ اور } \text{ج} = \text{م}^2 \text{ ع}^2$ (۱۰)
اور یہ ظاہر ہے کہ اگر ہم صرف حقیقی مقداروں پر ہی توجہ محدود رکھیں
تو ج لازماً مثبت ہوگا۔

$$\text{پس } \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{ع}^2 \text{ما} - \text{ما}^2} = \text{م} \text{ فر}^2 \dots \dots \dots (۱۱)$$

$$\text{یعنی ج}^2 = \frac{\text{ما}^2}{\text{ع}^2} = (\text{م} \text{ لا} + \text{صہ})$$

۴۱۴

یہ مساوات (۸) کا مکمل حل ہے اور اس میں دو اختیاری مستقل عہ اور
صہ ہیں۔

اگر عہ جہ صہ = ۱ اور - عہ جب صہ = جب (۱۳)
رکھیں تو حل کی معادل شکل

$\text{ما} = (\text{جہ} \text{ م} \text{ لا} + \text{جب} \text{ جہ} \text{ م} \text{ لا}) \dots \dots \dots (۱۴)$
حاصل ہوتی ہے۔ یہ نتیجے بہت اہم ہیں اور انہیں یاد رکھنا چاہیئے۔
ا کے منفی ہونے کی صورت میں فرض کرو کہ $\text{لا} = - \text{م}^2$ اور ایسے طرح
عمل کرنے پر مکمل حل حاصل ہوگا

$$\text{ما} = (\text{جہ} \text{ م} \text{ لا} + \text{جب} \text{ جہ} \text{ م} \text{ لا}) \dots \dots \dots (۱۵)$$

جہاں $\text{م} = \sqrt{1 - \text{لا}}$

اس صورت کے حل کرنے کا زیادہ آسان طریقہ آگے دیا جائیگا۔
نمونہ (۱) کی مساوات حرکیات میں بہت عام ہے مثلاً ایک ذرہ کی

نظری حرکت کی مساوات جس پر ایک ایسی قوت عمل کر رہی ہے جو ذرہ کے مقام کے معلومہ تفاعل کے متناسب ہے ذیل کی شکل کی ہے

$$\frac{فرلا}{فرت} = ف (لا) \dots \dots \dots (۱۶)$$

اور یہ (۱) کے مطابق ہے اگر مختلف ترقیم کا لحاظ رکھا جائے۔

تکمل کے پہلے طریقے میں طرفین کو $\frac{فرلا}{فرت}$ سے ضرب دیا جاتا ہے

$$\frac{فرلا}{فرت} \times \frac{فرلا}{فرت} = ف (لا) \frac{فرلا}{فرت}$$

اور بلحاظ ت کے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲} \left(\frac{فرلا}{فرت} \right)^۲ = ف (لا) \frac{فرلا}{فرت} + ج$$

$$= ف (لا) فرلا + ج \dots \dots \dots (۱۷)$$

جو ”توانائی کی مساوات“ کہلاتی ہے۔

دوسرے طریقے میں $\frac{فرلا}{فرت}$ کی بجائے (ع) کہتے ہیں اور اس لئے

$$\frac{فرلا}{فرت} کی بجائے ع \frac{فرلا}{فرت} (دفعہ ۳۲ دیکھو)$$

$$پس ع \frac{فرلا}{فرت} = ف (لا)$$

اور انہی کے تکمل کرنے سے

$$\frac{۱}{۲} ع^۲ = ف (لا) فرلا + ج \dots \dots \dots (۱۸)$$

نتیجہ (۱۸) کے مطابق ہے۔

مثال (۱)۔ اگر ایک ذرہ پر مبداء کی جانب، فاصلہ کے متناسب قوت کشش

عمل کر رہی ہے تو اسکی حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فرق}}{\text{وقت}} = \text{مساوات} \quad (۱۹)$$

یہ مساوات خاص صورت (۸) کی ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$\text{لا} = \text{اجم (مساوات + صہ)} \quad (۲۰)$$

یہ سادہ موسیقی حرکت کو ظاہر کرتی ہے۔ لا اور فرق کی قیمتیں تکرار پاتی

ہیں جبکہ مساوات کی قیمت میں ۲۲ کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لئے مدت

اہتزاز $\frac{۲۲}{\text{مساوات}}$ ہے۔ اس مل کے اختیاری مستقل لا اور صہ بالترتیب

حیطہ اور آن کہلاتے ہیں۔

ایک درجہ کی آزادی والے کسی ”بقائی“ حرکیاتی نظام کی مساوات حرکت بھی جب نظام کو قائم توازن کی حالت سے ذرہ سا ہٹا دیا جاتا ہے (۱۹) کی صورت کی ہوتی ہے۔

مثلاً رقاص کی صحیح مساوات حرکت

$$\text{ل} = \frac{\text{فرق}}{\text{وقت}} = \text{ج جب طہ} \quad (۲۱)$$

ہے۔ جہاں ج اسراع بجا ذریعہ ارض ہے اور ل ایک خاص طول ہے جو رقاص کی بناوٹ پر منحصر ہے۔ سادہ رقاص کی صورت میں ل دوری کا طول ہے۔ اگر حالت توازن سے انتہائی زاویہ ہٹاؤ ایک چھوٹا زاویہ ہو تو جب طہ کی بجائے طہ کہہ سکتے ہیں اور

$$\frac{\text{فرق}}{\text{وقت}} = \text{ج} = \text{طہ} \quad (۲۲)$$

اس مساوات کا حل ہے طہ = عجم (ج طہ + صہ) (۲۳)

اور اس لئے دور $\sqrt{\frac{L}{J}}$ ہے۔

صحیح مساوات (۲۱) مذکورہ بالا طریقہ سے ایک مرتبہ تکمیل کی جاسکتی ہے جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} L \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \right)^2 = J \text{ جم طہ} + \dots \dots \dots (۲۲)$$

لیکن (سوائے خاص صورت $L = J$ کے) دوسرا تکمیل ناقصی تقاضوں کی مدد کے بغیر دریافت نہیں ہو سکتا۔

مثال (۲) اگر ایک ذرہ سیدھے خط میں حرکت کر رہا ہو اور اس پرفوشش مبداء سے فاصلہ کے مربع کی معکوس نسبت میں بدلتی ہو تو

$$\frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}} = - \frac{m}{r^3} \dots \dots \dots (۲۵)$$

اس لئے دفعہ ۵۴ کی مثال (۳) سے

$$\frac{1}{2} L \left(\frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}} \right)^2 = \frac{m}{r} + J \dots \dots \dots (۲۶)$$

اور اگر ذرہ فاصلہ r پر سکون سے حرکت شروع کرے تو

$$J = - \frac{m}{r} \text{ اور } \frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}} = - \left[\frac{m_2}{r} \times \frac{r-1}{r} \right] \dots \dots \dots (۲۷)$$

منفی علامت لینے کی وجہ یہ ہے کہ رفتار مبداء کی طرف ہے۔ دوسرے تکمیل میں ابدال

$$\dots \dots \dots (۲۸) \dots \dots \dots L = J \text{ جم طہ}$$

سہولت دہ ہے۔ تغیر دن کو جدا کرنے پر

$$\dots \dots \dots (۲۹) \dots \dots \dots (1 + \text{جم } ۲ \text{ طہ}) \text{ فرطہ} = \left(\frac{m_2}{r_3} \right) \frac{1}{2} \text{ فرطہ}$$

$$\dots \dots \dots (۳۰) \dots \dots \dots \text{اسلئے طہ} + \frac{1}{2} \text{ جب } ۲ \text{ طہ} = \left(\frac{m_2}{r_3} \right) \frac{1}{2} \text{ ت} + J$$

اور جیسے لا، ۱ سے صفر تک گھٹتا ہے ویسے طما، صفر سے ۱۱ تک بڑھتا ہے۔ پس مقام سکون سے جو فاصلہ ۱ پر ہے مرکز کشش تک گزرتے کا وقت (ت) ذیل کے جملہ سے حاصل ہوتا ہے

$$ت = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r}{R}}} \quad (۳۱)$$

۱۶۴۔ تفرقی مساواتیں جن میں صرف پہلے اور دوسرے رتبہ کے مشتق موجود ہوں

اگر مساوات ذیل کی صورت کی ہو

$$فما \left(\frac{فرما}{فرلا} \right) = \dots \dots (۱)$$

جس میں متغیر لا اور ما صریحی طور پر شریک نہیں ہوتے تو فرما کی بجائے (ع) لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$فما \left(\frac{فرع}{فرلا} \right) = \dots \dots (۲)$$

اور یہ تابع متغیر (ع) میں پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مساوات (۱) دفعہ ۱۶۳ کے مطابق $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بجائے ع فرع لکھنے سے بھی پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل ہو سکتی ہے۔ اس میں ما متبوع متغیر ہو گا۔

$$اس طرح فما \left(\frac{فرع}{ع} \right) = \dots \dots (۳)$$

مثال (۱)۔ ایسے منحنی دریافت کرو جن کا نصف قطر انحدار مستقل (لا) ہے۔

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{1}{1} \pm = \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}}{\left\{ \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 + 1 \right\}}$$

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{\text{فرلا}}{1} \pm = \frac{\text{فرع}}{\left\{ \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 + 1 \right\}} \quad \text{یا}$$

اس کو تکمیل کرنے سے (دفعہ ۷، نتیجہ ۱۳)

$$(۶) \dots\dots\dots \frac{\text{علا} - \text{عما}}{1} \pm = \frac{\text{ع}}{\left\{ \left(\frac{\text{علا} - \text{عما}}{\text{علا} - \text{عما}} \right)^2 + 1 \right\}}$$

جہاں عما اختیاری مستقل ہے

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{\text{علا} - \text{عما}}{\left\{ \left(\frac{\text{علا} - \text{عما}}{\text{علا} - \text{عما}} \right)^2 + 1 \right\}} \pm = \text{ع} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$(۸) \dots\dots\dots \frac{\text{علا} - \text{عما}}{\left\{ \left(\frac{\text{علا} - \text{عما}}{\text{علا} - \text{عما}} \right)^2 + 1 \right\}} \pm = \text{ع} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

جہاں عما آخری تکمیل کا اختیاری مستقل ہے۔

یہ نتیجہ ذیل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۹) \dots\dots\dots \frac{\text{علا} - \text{عما}}{\left\{ \left(\frac{\text{علا} - \text{عما}}{\text{علا} - \text{عما}} \right)^2 + 1 \right\}} \pm = \text{ع} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

جو نصف قطر دالے دائروں کے قبیل کو ظاہر کرتا ہے۔ مذکورہ بالا اعلیٰ عام طریقہ کی مثال کے طور پر دیا گیا ہے اگرچہ اس سوال کا حل اور طریقوں سے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال (۲)۔ ذرو کی خطی حرکت دریافت کر جس پر ایسی قوت عمل کر رہی ہے جو رفتار کا ایک معلومہ تفاعل ہے۔

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ف} \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \right) \dots\dots\dots$$

ظاہر ہے کہ یہ صورت (۱) کے تحت آتی ہے۔ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ کی بجائے (۱)

$$\text{لکھنے سے } \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ف (۱)}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرو}}{\text{ف (۱)}} = \text{فرت}$$

اس لئے $\frac{\text{فرو}}{\text{ف (۱)}} = \text{ت + ج} \dots \dots \dots (۱۱)$

مثلاً اگر ذرہ پر کل فراغت وقت کے متناسب ہے تو

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{گ و} \dots \dots \dots (۱۲)$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{و} = \frac{\text{گ و}}{\text{گ و}}$$

$$\text{اور لا} = \frac{۱}{\text{گ و}} \times \frac{\text{گ و}}{\text{ب}} \dots \dots \dots (۱۳)$$

اب ذرہ کو خواہ کسی طرح پھینکا جائے جیسے ت بڑھتا ہے لا متغیر رہتا ہے۔
انتہائی قیمت ب کے قریب آتا جاتا ہے۔
نیز اگر فراغت وقت کے مربع کی طرح بدلتے تو

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{گ و}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرو}}{\text{و}} = \text{گ فرت}$$

$$\text{اس لئے } \frac{۱}{\text{و}} = \text{گ ت + ر} \dots \dots \dots (۱۴)$$

$$\text{ہذا } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{و} = \frac{۱}{\text{گ ت + ر}}$$

اور لا = $\frac{۱}{ج}$ لوگ (گ ت + ا) + ب (۱۵)

(۲) سے ظاہر ہے کہ اگرچہ رفتار (و) متقارباً صفر ہوتی ہے تاہم طے شدہ فاصلہ کی کوئی انتہا نہیں ہے۔

اگر ہم دوسرا طریقہ استعمال کریں تو (۱۰) کی بجائے

۴۱۸

مساوات و = $\frac{فر}{فر لا}$ = ف (و) (۱۶)

حاصل ہوتی ہے۔ اب اس صورت میں جبکہ فراحت رفتار کے متناسب ہے

$\frac{فر}{فر لا}$ = - گ اور و = - گ لا + ج (۱۷)

پس $\frac{فر لا}{فر ت}$ + گ لا = ج (۱۸)

اور دفعہ ۱۵۷ سے لا = $\frac{ج}{ج}$ + د + فو (۱۹)

جہاں ج اور د اختیاری مستقل ہیں۔ نتیجہ (۱۳) کے مطابق ہے

نیز اگر فراحت رفتار کے تناسب ہو تو

$\frac{فر}{فر لا}$ = - گ و اور و = ج فو (۲۰)

پس $\frac{فر لا}{فر ت}$ = ج

اس لئے $\frac{۱}{ج}$ فو = ج ت + د (۲۱)

یعنی ک لا = لوگ (گ ج ت + گ د) (۲۲)

(۱۵) میں ا = $\frac{گ د}{ج}$ اور ک ب = لوگ ج رکھنے سے اس امر کی

تصدیق ہو سکتی ہے کہ یہ نتیجہ (۱۵) سے مختلف نہیں ہے۔

۱۶۵۔ مساواتیں جن میں ایک متغیر موجود نہیں ہے۔

(۱) اگر تاج متغیر صریحاً موجود نہ ہو تو مساوات ذیل کی صورت کی ہوگی

$$ف = \left(\frac{فر}{لا} ، \frac{فر}{لا} ، (لا) \right) = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

اس میں $\frac{فر}{لا}$ کی بجائے ع لکھنے سے، ع میں پہلے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ یعنی

$$ف = (ع ، \frac{فر}{لا} ، (لا)) = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

اگر اس کا حل

ع = ف (لا ، لا) (۱) ... (۳) کی شکل میں رکھا جاسکتا ہے جہاں لا اختیاری مستقل ہے، تو دوسرے متغیر سے حاصل ہوگا

$$ما = ف (لا ، لا) (فر + ج) \dots \dots (۴)$$

اس میں ایک اختیاری مستقل ما کے ساتھ بطور اضافہ کے شریک ہے۔ یہ بات ابتدا ہی سے ظاہر تھی کیونکہ ما کی بجائے (ما + ج) لکھنے سے مساوات (۱) میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔

(۲) اگر متبوع متغیر صریحاً موجود نہ ہو تو مساوات ذیل کی صورت کی ہوگی

$$ف = \left(\frac{فر}{لا} ، \frac{فر}{لا} ، (ما) \right) = ۰ \dots \dots (۵)$$

اور دفعہ ۱۶۳ (۳) کے مطابق

(۶) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} ، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}$
 کہنے سے حاصل ہوگا

(۷) $\text{فہر} \text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} ، \text{ع} ، \text{ما} =$
 جو ع اور ما میں پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔ اگر اس کا حل ذیل کی شکل میں لکھا جائے

(۸) $\text{ع} = \text{ف} \text{ما} ، \text{ا})$
 تو دوسرے تکمل سے حاصل ہوگا

(۹) $\text{ا} \text{ف} \text{ما} ، \text{ا}) = \text{لا} + \text{حب}$
 یہاں بھی مساوات (۵) کی شکل سے نتیجہ نکالا جاسکتا تھا کہ ایک اختیاری مستقل لا کے ساتھ بطور اضافہ کے شریک ہوگا۔

(۱۰) مثال (۱) (۱-لا) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} =$
 اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$\frac{1}{\text{ع}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}}{\text{ا} - \text{لا}}$
 اس کے لوک ع = - $\frac{1}{\text{ا} - \text{لا}}$ لوک (۱-لا) + مستقل

(۱۱) $\text{ا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} = \frac{\text{ا}}{\text{ا} - \text{لا}}$
 اسے ما = ا جب لا + حب

(۱۲) مثال (۲) تنجاذب کے نظریہ میں مساوات

(۱۳) $\frac{\text{فرق}}{\text{فرر}} + \frac{2}{\text{ر}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرر}}$

اکثر نمود وار ہوتی ہے، $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$ کو تابع متغیرانے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(۱۳) \dots\dots\dots = \frac{۲}{ر} + \frac{\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}}{\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}}$$

اس لئے لوگ $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + ۲$ لوگ $ر =$ مستقل

یا دوبارہ سمجھل کرنے سے

$$(۱۵) \dots\dots\dots \frac{۱}{ر} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$$

$$(۱۶) \dots\dots\dots ق = - \frac{۱}{ب} + \dots\dots\dots$$

مثال (۳) ایسے منحنی دریافت کرو جن کا نصف قطر انحناء عماد کے مساوی ہے لیکن منحنی کے دوسرے جانب واقع ہے۔
دفعات ۶۰ اور ۱۳۵ کے دیکھنے سے ظاہر ہے کہ مذکورہ بالا شرط سے ذیل کی مساوات حاصل ہوگی

$$\frac{۱}{۶} \left\{ ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) \right\} = \frac{\left\{ ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) \right\}}{\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}}$$

مختصر کر کے ابدال (۶) کے استعمال سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱۸) \dots\dots\dots \frac{۱}{۶} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} + \frac{۱}{۶}$$

اس لئے $\frac{۱}{۶}$ لوگ $(۱ + \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}) =$ لوگ $۶ +$ مستقل

اس لئے $\frac{۲۵}{ج} = ۱ + ۲۷$ (۱۹)

جہاں ج اختیاری مستقل کے طور پر لیا گیا ہے کیونکہ یہ لازماً مثبت ہے۔

اس لئے $\frac{فرما}{فرلا} = ۲۷ = ۱ + \frac{۲۵}{ج}$ (۲۰)

متغیروں کو جدا کرنے سے

$$\frac{فرما}{ج} \pm = \frac{فرلا}{ج}$$

جہنما $\frac{۲۵}{ج} = ۱ + \frac{فرلا}{ج}$ (۲۱)

جہاں ۲۵ دوسرا اختیاری مستقل ہے۔

پس $۲۵ = ج + جہنما$ (۲۲)

جوزخیرہ کے قبیل کو ظاہر کرتا ہے۔ دفعہ ۱۳۴ شمال (۱) دیکھو۔

۱۶۶۔ دوسرے رتبہ کی خطی مساوات۔

ایسی تفرقی مساوات جس میں تابع متغیر اور اس کے پہلے مشتقوں کی صرف پہلی قوتیں موجود ہوں اور انکا کوئی حاصل ضرب موجود نہ ہو، ویں رتبہ کی تفرقی مساوات کہلاتی ہے لہذا دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات یہ ہوگی

$\frac{فرما}{فرلا} + ف + \frac{فرما}{فرلا} + ق = ۲۷$ (۱)

جہاں ف، ق اور ۲۷ متغیر لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔

خدا ہم خواص تمام خطی مساواتوں میں مشتک ہیں۔ ہم دوسرے رتبہ کی مساوات کے لئے انکے ثبوت دینکے لیکن عقل سے ظاہر ہوگا

کہ عام شکل کے لئے بھی اس کی توسیع باسانی ہو سکتی ہے۔

۴۲۱

(۱) مساوات (۱) کا مکمل حل

$$\text{فا} = \text{ع} + \text{ط} \dots \dots \dots (۲)$$

کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جہاں (ط) ایسا تفاعل ہے کہ یہ مساوات (۱) کی موجودہ صورت کو پورا کرتا ہے اور (ع) مساوات

$$\frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ف} = \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ق} = \text{فا} \dots \dots (۳)$$

کا عام حل ہے جہاں مساوات (۳) مساوات (۱) کے بائیں جانب کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اب اس مفروضہ کی بنا پر کہ $\text{فا} = \text{ع} + \text{ط}$ جہاں ط مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے اور ع دریافت طلب ہے مساوات (۱) میں اندراج سے

$$\frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ف} = \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ق} + \text{ع} = \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ق} + \text{ط} = \text{فر} \dots \dots \dots$$

اور چونکہ مفروض سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ف} = \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ق} + \text{ط} = \text{فر} \dots \dots \dots (۴)$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ف} = \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ق} = \text{ع} = 0 \dots \dots \dots (۵)$$

یعنی تفاعل ع مساوات (۳) کو پورا کرتا ہے۔

مساوات (۱) کے مکمل حل کے دو حصے ط اور ع کو بالترتیب 'خاص' و 'تعمیم' کہتے ہیں۔ یہ واضح رہے کہ خاص 'تعمیم' ابتدائی تفرقی مساوات کا کوئی 'حل' ہے اور جتنا سادہ ہو بہتر ہوگا۔ برخلاف اس کے 'تعمیم' تفاعل مساوات (۳) کا عام حل ہے اور اس لئے اس میں دو اختیاری مستقل شریک ہونگے۔

(۲) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، مساوات (۳) کے کوئی دو محل ہوں تو

(7) $\dots \dots \dots \rho, \tau + \rho, \tau = 1$

مساوات کو پورا کرے گا۔ اس میں جہ اور جہ اختیاری مستقل
ہیں۔ مساوات میں درج کرنے سے باہمی اس امر کی تصدیق ہوگی
ہے ہذا اگر تعامل جہ اور جہ ایک دوسرے کے تابع نہ ہوں
یعنی ایک تعامل دوسرے کا غرض مستقل ضعیف نہ ہو تو ضابطہ (۶)
سے مساوات (۳) کا ایسا حل حاصل ہوتا ہے جس میں دو اختیاری
مستقل ہو جو درج ہیں۔

(۳) اگر مساوات (۲) کا کوئی خاص شکلہ (۵) معلوم ہو تو اب اس کا معنی و سے مساوات (۱) یا فری میں پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل ہو جاتی ہے اور اس کے مساوات (۱) کا مکمل حل اس پہلے رتبہ کی مساوات کے مکمل پر آ کے منحصر ہوتا ہے۔ کیونکہ مساوات (۱) ہو جاتی ہے۔

و فری + (فری + ف) + (فری + ف) + ف + قوی = ر

جو فرض کی بناء پر

$$و فری = \frac{فری}{(۱)} + \left(۲ + \frac{فری}{(۲)} + \frac{فری}{(۳)} + \dots + \frac{فری}{(n)} \right) \quad (۸)$$

میں تحویل ہو جاتی ہے۔ یہ تابع متغیر فری میں پہلے رتبہ کی خلی مساوات ہے۔ بالخصوص اگر $s = 0$ ۔ تو

$$(9) \quad \frac{f_1}{f_2} + \frac{f_2}{f_3} + \frac{f_3}{f_4} = f$$

اس لئے $\text{لوک فری} + \text{لوک و} + \text{ف فرلا} = \text{مستقل}$

یا $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و}}{\text{ف فرلا}} \dots \dots \dots (۱۰)$

پس $\text{ی} = \frac{\text{ا}}{\text{و}} \frac{\text{ف فرلا}}{\text{ف فرلا}} + \text{ب فرلا} \dots \dots \dots (۱۱)$
اور اس لئے (۳) کا مکمل حل ہے

$\text{ما} = \frac{\text{ا}}{\text{و}} \frac{\text{ف فرلا}}{\text{ف فرلا}} + \text{ب و} \dots \dots \dots (۱۲)$

اب خطی مساواتوں کو مختلف ترکیبوں سے تکمیل کرنے کی چند مثالیں دی جائیں گی۔ سلسلوں میں تکمیل کرنے کے طریقوں پر چودھویں باب میں غور کیا جائے گا۔
مثال (۱) آواز کے نظریہ میں اور طبیعیاتی ریاضی کی دیگر شاخوں میں ذیل کی مساوات اکثر رائج ہوتی ہے

$\frac{\text{فر فم}}{\text{فر ر}} + \frac{\text{ر}}{\text{فر ر}} + \text{ک}^2 \text{فم} = ۰ \dots \dots \dots (۱۳)$

اگر اسے ر سے ضرب دیں تو یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$\frac{\text{فر}^2}{\text{فر ر}} + (\text{ر فم}) + \text{ک}^2 (\text{ر فم}) = ۰ \dots \dots \dots (۱۴)$

اس لئے دفعہ ۱۶ کی روش

$\text{ر فم} = (\text{اجم ر ک ر}) + (\text{ب جب ر ک ر})$

یا $\text{فم} = \frac{(\text{اجم ر ک ر}) + (\text{ب جب ر ک ر})}{\text{ر}} \dots \dots \dots (۱۵)$

مثال (۲) (۱-۱) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = ۰ \dots \dots \dots (۱۶)$

ظاہر ہے کہ $\text{ما} = \text{لا}$ اس کا ایک خاص حل ہے۔

اس لئے $\text{ما} = \text{لا}$ ہی رکھتے ہیں

(۱۷)

$$(18) \dots = \frac{\text{فری}^2}{\text{فر لا}} (2 - 3 \text{ لا}) + \frac{\text{فری}}{\text{فر لا}} (1 - \text{لا})$$

۴۲

اب متغیروں کو جدا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(19) \dots = \frac{\text{فری}}{\text{فر لا}} - \frac{2}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{لا} - 1}$$

$$(20) \dots = \frac{\text{فری}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لا}^2 - 1 \text{ لا}}$$

$$(21) \dots = \text{فری} = \frac{\text{لا}^2 - 1 \text{ لا}}{\text{لا}} + \text{جب}$$

اس لئے (۱۶) کا مکمل حل ہے

$$(22) \dots = \text{ما} = \frac{\text{لا}^2 - 1 \text{ لا}}{\text{لا}} + \text{جب لا}$$

$$(23) \text{ مثال (۳) } (1 + \text{لا})^2 \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 3 \text{ لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = 0$$

اتفاق سے یہ ”ٹھیک“ مساوات ہے۔ یعنی دایاں رکن، $\text{لا}^2 \text{ ما}$ ، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے ایک تفاعل کا ٹھیک تفرقی سر ہے، کیونکہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$= \left\{ (1 + \text{لا})^2 \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 2 \text{ لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \right\} + \left\{ \text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} \right\} = 0$$

$$(24) \dots = \text{پس اس کا تجمہ ہے } (1 + \text{لا})^2 \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{لا ما} = 0$$

یہ پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔ اور ظاہر ہے کہ اس کا مکمل جزو ضربی

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right\}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right\} \dots \dots (25)$$

امثلہ ۵۵

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right\}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right\}$$

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right\}$$

(۴) ایک افقی سلاخ پر صرف اس کا وزن اور اس کے ٹیکوں کے

دباؤ عمل کر رہے ہیں سلاخ کے انصراف کے لئے تفرقی مساوات یہ ہے

$$b = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

جہاں 'و' وزن فی اکائی طول ہے۔

و کو مستقل مانکر اس مساوات کو تکمیل کرو اور مستقلات کو ذیل کے شرائط کے تحت دریافت کرو

$$b = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \dots \dots \dots \text{اور نیز جبکہ } a = 1$$

[یہ صورت (ل) طول والی یکساں سلاخ میں پیدا ہوگی جو سروں پر لگی ہوگی]

(۵) [جب $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (ل - ل) (ل + ل - ل) - (ل - ل)]
مذکورہ بالا سوال کو ذیل کے شرائط کے ماتحت حل کرو

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ جبکہ } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ اور نیز } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

[یہ صورت ایک سلاخ کی ہے جو دونوں سروں پر جکڑی ہوئی ہے]

$$[\text{جب } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (ل - ل) - (ل - ل) }]$$

(۶) سوال (۴) کی مساوات کو ذیل کے شرائط کے ماتحت حل کرو

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ کے لئے } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ کے لئے } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

[یہ صورت ایسی سلاخ کی ہے جس کا ایک سرا جکڑا ہوا ہے اور دوسرا آزاد ہے]

$$[\text{جب } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (ل - ل) - (ل - ل) }]$$

(۷) مساوات $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ - مساوات + ف کو حل کرو اور حل کی طبیعت

تعبیر تباؤ۔

$$[\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ (مساوات + صہ) }]$$

(۸) ایک ذرہ کی خطی حرکت کی تفرقی مساوات جس پر فاصلہ کے تناسب

قوتِ اندفاع عمل کر رہی ہے $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ - ثابت کرو کہ اس کا

حل ذیل کی تین شکلوں میں سے کوئی ایک ہے اور نتیجوں کی طبعی تعبیر تباؤ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (مساوات + صہ) } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (مساوات + صہ) } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(۹) ایک ذرہ حالت سکون سے فاصلہ (۱) سے قوت کے مرکز کی طرف

حرکت کرتا ہے۔ کشش کا اسراع مساوی ہے (۱) فاصلہ - کے - ثابت کرو کہ

مرکز تک گرنے کا وقت $\frac{1}{2}$ ہے۔

(۱۰) مرکزی مدار کی عام تفریق مساوات

$$\frac{فرطہ}{فرطہ} + ۶ = \frac{ف}{۲۰} \text{ ہے جہاں 'ف' کا معلومہ تفاعل ہے۔}$$

اس کا پہلا تکمیل دریافت کرو۔

$$\left[\frac{ف}{فرطہ} + ۶ = ۲ \right] \text{ فرطہ + ج}$$

(۱۱) مساوات $\frac{فرطہ}{فرطہ} = \frac{مسا}{۲}$ کو حل کرو اور ثابت کرو کہ حل مائل ہے

$$۲ = ۱ + ۲ \text{ ب ت + ج ت}$$

جہاں مستقلات ۱، ۲ ب اور ج میں ذیل کا ربط ہے

$$۱ - ج - ۲ = ۲$$

۴۲۵ (۱۲) $\frac{فرطہ}{فرطہ} = \frac{فرطہ}{فرطہ}$ [۱ + ۲ ب = ۲]

(۱۳) $۱ = \frac{فرطہ}{فرطہ} \frac{فرطہ}{فرطہ}$ [۱ (۱ - ۲) = ۲]

(۱۴) $۱ = \frac{فرطہ}{فرطہ} + \frac{فرطہ}{فرطہ}$ [۱ = ۲ ب]

(۱۵) $\frac{فرطہ}{فرطہ} = \frac{فرطہ}{فرطہ} + ۱$ [۱ - ۲ = ۲]

(۱۶) $\frac{فرطہ}{فرطہ} = \frac{فرطہ}{فرطہ} + ۱$ [۱ = ۲ ب]

(۱۷) $\frac{فرطہ}{فرطہ} = \frac{فرطہ}{فرطہ}$ [۱ = ۲ ب]

(۱۸) $\frac{فرطہ}{فرطہ} = \frac{فرطہ}{فرطہ}$ [۱ = ۲ ب]

$$(۱۹) \quad \frac{\text{فرق}}{\text{فر}} + \frac{۱}{\text{فر}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فر}} \quad [\text{ق} = (\text{لوک} + \text{ب})]$$

$$(۲۰) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{لا} + \text{ب})]$$

$$(۲۱) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} + \frac{\text{ما}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = ۲ \text{ به منتهی به } (\text{لا} - \text{عص})]$$

$$(۲۲) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + ۱ + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = \text{ب} + (۱ + \frac{۱}{\text{عص}}) (\text{لوک} + \text{عص}) - \frac{\text{لا}}{\text{عص}}]$$

$$(۲۳) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۲۴) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ - \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۲۵) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۲۶) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۲۷) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۲۸) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۲۹) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۳۰) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۳۱) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۳۲) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (۱ + \text{لا}) + \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \quad [\text{ما} = (\text{ب} + \text{ج} + \text{لا})]$$

$$(۳۰) \quad \frac{فر}{لا} \{ (۱-لا) \frac{فر}{لا} \} = \{ ۶ = (۱+ب) منرا \}$$

$$(۳۱) \quad \frac{فر}{مما} \{ (۱-مما) \frac{فر}{مما} \} = ۲۰۲۰$$

$$(۳۲) \quad [۶ = (۱+ب) (۱-مما) مسترا] \text{ ایسے منحنی دریافت کرو کہ نصف قطر انحنایہ عماد کے مساوی ہے اور یہ دو نون منحنی کے ایک ہی جانب واقع ہیں۔}$$

$$(۳۳) \quad [دائرے (لا-عما) + ما = بیہ] \text{ ایسے منحنی دریافت کرو کہ نصف قطر انحنایہ عماد کا دو چہرہ ہے اور یہ دو نون منحنی کے مخالف جانب واقع ہیں۔}$$

$$(۳۴) \quad \text{مکافی (لا-عما) = ۴ بیہ (وا-بیہ)} \text{ ایسے منحنی دریافت کرو کہ محور پر نصف قطر انحنایہ عماد کا نقل و کے مساوی ہے۔}$$

$$(۳۵) \quad [ما = بیہ لوک قوط (لا-عما)] \text{ ایسے منحنی دریافت کرو جنکا نصف قطر انحنایہ عماد کے کعب کے متناسب ہے}$$

[منحروطی تراشیں جنہیں لا محور، محور تشاکل ہے]

$$(۳۶) \quad (۱+لا) \frac{فر}{لا} + لا \left(\frac{فر}{لا} \right)^۲ = \frac{فر}{لا}$$

$$[ما = بیہ + لوک (لا-عما) - \frac{۱}{عما} لوک \left(\frac{لا+عما}{لا-عما} \right)]$$

$$(۳۷) \quad (۱-لا) \frac{فر}{لا} - \frac{۱}{لا} \frac{فر}{لا} + لا = ۰$$

$$[ما = (۱+ب) \left(لا - \frac{۱}{۲} لا \right)^۲]$$

$$(۳۸) \quad \frac{فر}{لا} + ف \frac{فر}{لا} + \frac{فر}{لا} = ما$$

$$[ما = فو (ا) فو (ف) فو (لا + جب)]$$

$$(۳۹) \quad \frac{فرما}{فرلا} + \frac{۲}{لا} \frac{فرما}{فرلا} - ما = . \quad [ما = \frac{ا فو + جب فو}{لا}]$$

$$(۴۰) \quad (ا + لا) \frac{فرما}{فرلا} - ۲ \frac{فرما}{فرلا} = ما + ۲ = .$$

$$[ما = لا + جب (ا - لا)]$$

$$(۴۱) \quad (ا + لا) \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = ما' \quad [ما = لا + جب (ا + لا)]$$

$$(۴۲) \quad \text{مساوات (لا - ا)} \quad \frac{فرما}{فرلا} - ۲ \frac{فرما}{فرلا} + ما = . \quad \text{کو حل کرو}$$

$$(۴۳) \quad \text{اس کا ایک حل } ما = لا \text{ معلوم ہے۔} \quad [ما = لا + جب (ا + لا)]$$

$$(۴۳) \quad \text{مساوات } لا \frac{فرما}{فرلا} - (ن - لا) \frac{فرما}{فرلا} - ن ما = . \quad \text{کو حل کرو}$$

$$\text{جبکہ ایک حل } ما = فو \text{ ہے۔} \quad [ما = ا فو + جب فو (لا فو)]$$

$$(۴۴) \quad \text{مساوات (لا - ا)} \quad \frac{فرما}{فرلا} + لا \frac{فرما}{فرلا} - ما = . \quad \text{میں ابدال}$$

$$\text{می = جہن لا سے متو خ تغییر کو (می) میں تبدیل کرو اور اس کو حل کرو}$$

$$[ما = اجم می + جب جب می]$$

$$(۴۵) \quad \frac{فرما}{فرلا} + ۲ ن مم (ن لا) \frac{فرما}{فرلا} + (م - ن) ما = .$$

$$[ما = \frac{ا اجم مم + جب جب مم لا}{جب ن لا}]$$

$$(۴۶) \quad (۱-لا^۲) \left(\frac{فرما^۲}{فرلا^۲} - ۳لا \right) \frac{فرما}{فرلا} - ما = ۰$$

$$\left[\frac{اجب^۱ - لا + جب}{۲لا - ۱} = ما \right]$$

$$(۴۷) \quad لا^۲ ما \frac{فرما^۲}{فرلا^۲} + (ما - لا) \frac{فرما}{فرلا} = ۲ \quad [ما^۲ = لا + جب لا^۲]$$

$$(۴۸) \quad لا ما \frac{فرما^۲}{فرلا^۲} + لا \left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^۲ - ما \frac{فرما}{فرلا} = ۲ \quad [ما^۲ = لا + جب]$$

$$(۴۹) \quad ۳ \frac{فرما^۲}{فرلا^۲} \times \frac{فرما}{فرلا} = ۵ \left(\frac{فرما^۳}{فرلا^۳} \right)$$

$$[(ما - لا - جب) = ج لا + د]$$

$$(۵۰) \quad ۲ \frac{فرما}{فرلا} \times \frac{فرما^۳}{فرلا^۳} = ۳ \left(\frac{فرما^۴}{فرلا^۴} \right)$$

$$\left[\frac{ب}{لا + ج} + ۱ = ما \right]$$



تیرہواں باب

مستقل سروں والی خطی مساواتیں

۴۲۸

۶۷۔ دوسرے رتبہ کی مساواتیں۔ متمم تفاعل۔

مستقل سروں والی خطی مساواتیں ریاضی طبیعیات میں اس کثرت سے واقع ہوتی ہیں کہ ان پر تفصیل سے غور کرنا مناسب ہوگا۔ اس تحقیق میں تبوع متغیر Δ کے لحاظ سے عامل عفا یا $\frac{F}{\Delta}$ کی چند خاصیتوں کو استعمال کرنے سے بہت سہولت پیدا ہوتی ہے۔

رفہ ۲۹ میں ثابت کر دیا گیا ہے کہ عفا کا Δ تقسیمی ہے یعنی اگر Δ اور Δ' متغیر Δ کے تفاعل ہوں تو

$$(۱) \quad \text{عفا} (۶+۷) = \text{عفا} ۶ + \text{عفا} ۷ \dots\dots\dots (۱)$$

نیز اگر Δ مستقل ہو تو

$$(۲) \quad (\text{عفا} ۶) + (\text{عفا} ۷) = \text{عفا} ۶ + \text{عفا} ۷ = \text{عفا} ۶ + \text{عفا} ۷ = \text{عفا} ۶ + \text{عفا} ۷ \dots\dots\dots (۲)$$

$$(۳) \quad \text{اور} \quad \text{عفا} (۶) = \Delta \cdot \frac{F}{\Delta} = \Delta \cdot \text{عفا} ۶ \dots\dots\dots (۳)$$

اس لئے عفا مستقل ضعیف کی شرکت میں قانون تبادلہ کے تابع ہے۔
 علاوہ ازیں عفا قوت ثنائی قانون کے بھی تابع ہے یعنی

$$(۴) \quad \text{عفا}^۴ \text{عفا}^۳ = \text{عفا}^{۴+۳} \dots\dots\dots (۴)$$

پس عال عف بذات خود اور مستقل ضعف کے ساتھ معمولی جبر و مقابلہ کے اساسی قوانین کو مانتا ہے۔ اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ جبر و مقابلہ کے وہ نتائج جو اوپر کے قوانین سے حاصل ہوتے ہیں موجودہ اطلاق کے لئے بھی درست ہونگے بشرطیکہ عف کی رقوم میں آنکے کوئی معنی موجود ہو بطور مثال اگر لہ، لہ، لہ، مستقل ہوں تو

$$(عف - لہ) (عف - لہ) = (عف - لہ) (عف - لہ) \quad (فرۛۛ - لہ، ۛ)$$

$$= \frac{فرۛۛ}{فرۛۛ} (عف - لہ) (عف - لہ) = \frac{فرۛۛ}{فرۛۛ} (عف - لہ) (عف - لہ) \quad (فرۛۛ - لہ، ۛ)$$

$$= \frac{فرۛۛ}{فرۛۛ} (عف + لہ) (عف + لہ) + \frac{فرۛۛ}{فرۛۛ} لہ، لہ، لہ، ۛ$$

$$= [عف (عف + لہ) + لہ، لہ، لہ، ۛ] = (ۛ)$$

اب ہم دوسرے رتبہ کی مساوات پر غور کریں گے۔ یہ مساوات حرکیاتی سوالات ۴۲۹ میں اکثر نمودار ہوتی ہے۔
مستم تعامل دریافت کریں گے لئے ذیل کے نمونے کی مساوات کو حل کرنا ہے

$$\frac{فرۛۛ}{فرۛۛ} + \frac{فرۛۛ}{فرۛۛ} + ب = ۛ \quad (ۛ)$$

$$\text{یعنی } (عف + عف + ب) = ۛ \quad (ۛ)$$

اگر $\frac{ۛ}{ۛ}$ ب تو اس کے معادل ہے

$$(عف - لہ،) (عف - لہ،) = ۛ \quad (ۛ)$$

جہاں لہ، لہ، مساوات لہ، + لہ، + ب = کی اصلیں ہیں۔

$$\text{یعنی لہ، لہ،} = \frac{ۛ}{ۛ} + \frac{ۛ}{ۛ} + ب \quad (ۛ)$$

$$\text{اگر لکھیں } (عف - لہ،) = ۛ \quad (ۛ)$$

تو مساوات (۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱۲) \dots\dots\dots = (عف - لہ) ی$$

جو پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے، دفعہ (۱۵) سے اس کا حل ہے

$$(۱۳) \dots\dots\dots = ی = ا فو$$

اور نتیجہ (۱۱) میں درج کرنے سے

$$(۱۴) \dots\dots\dots = (عف - لہ) ما = ا فو$$

اس لئے دفعہ (۱۵) (آ) سے

$$(۱۵) \dots\dots\dots = ما = ج فو + ج فو$$

جہاں ج = $\frac{ا}{لہ}$

چونکہ ایک اختیاری مستقل ہے اس لئے ج، ج، ج بھی اختیار کیا مستقل ہونگے۔ اور عمل سے ظاہر ہے کہ (۱۵) مساوات (۶) کا عام حل ہے۔

اگر $\frac{ا}{لہ} = ۱$ = ب تو مساوات (۹) کی لہا میں اعلیٰ مساوی ہیں اور (۱۳) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$(۱۶) \dots\dots\dots = (عف - لہ) ما = ا فو$$

اس کا عام حل دفعہ (۱۵) (۲) کے مطابق ہے

$$(۱۷) \dots\dots\dots = ما = (ا لا ب ج) فو$$

اگر $\frac{ا}{لہ} > ۱$ = ب سے تو (۹) کو پورا کرنے والی لہا کی قیمتیں خیالی ہیں تاہم مذکورہ بالا طریقہ سے مساوات (۶) کا ایسا علامتی حل دریافت

متناسب ہے ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتی ہے

$$\frac{فرٲ لا}{فرٲ لا} + گ = \frac{فرٲ لا}{فرٲ لا} + مٲ لا = . \quad (۲۹)$$

جہاں گ رگڑ کی قدر ہے۔ یہی مساوات روپیہ کی سوئی کی حرکت کو بھی ظاہر کرتی ہے جبکہ اس پر پیو کی لزوجت کا اور اس مالی رو کا برقی متقا طیسعی عمل ہو رہا ہو جو سوئی کی حرکت سے پاس کی دھات کی اشیا میں پیدا ہوتی ہے۔
مختلف تر قلم کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات (۲۹) کا حل جبکہ رگڑ کی قدر ایک خاص مقدار سے کم ہے یہ ہے

$$لا = ج \cdot فو \cdot \frac{۱}{۲} \cdot جم (ن, ت + صہ) \quad (۳۰)$$

جہاں ن = $\sqrt{\frac{۱}{۲} \cdot مٲ لا}$ ۔ (۳۱)
نتیجہ (۳۰) سے جو حرکت تعبیر ہوتی ہے اسے ایسی سادہ موسیقی حرکت خیال کیا جاسکتا ہے جس کا دور $\frac{\pi}{۲} \cdot ن$ ہے اور جس کا محیط قانون $\frac{۱}{۲} \cdot گ$ کے مطابق متقار یا صفر تک کم ہوتا ہے۔ حل (۳۰) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ گ > مٲ لا۔ اگر گ < مٲ لا تو مناسب حل یہ ہوگا

$$لا = ا \cdot فو + ب \cdot فو \quad (۳۲)$$

جہاں لٲ لا، لٲ لا مساوات لٲ لا + گ لٲ لا + مٲ لا = . (۳۳)
کی اصلیں ہیں۔ مفروضہ کی بنا پر یہ اصلیں حقیقی ہیں اور چونکہ ان کا حاصل ضرب (مٲ لا) مثبت ہے اس لئے یہ ایک ہی علامت کی ہوگی۔ نیز چونکہ ان کا حاصل جمع (گ) منفی ہے اس لئے دونوں اصلیں منفی ہوگی۔ اس لئے ہٹاؤ لا زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ صفر قیمت اختیار کرنے کے بعد متقار یا صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔ یہ صورت سست گام روپیہ میں یا بہت زیادہ لزج مائع میں حرکت کرنے والے رقا ص میں نمودار ہوتی ہے۔

انتہائی صورت میں جبکہ گ = مٲ لا

لا = (ا + ح) ت قو - ۱/۲ گت (۳۴)

پہلا جزو ضربی، مطلق قیمت کے لحاظ سے ت کے ساتھ ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے اور دوسرا گھٹتا ہے۔ لیکن چونکہ دوسرے جزو ضربی کا گھٹنا پہلے کے بڑھاؤ سے زیادہ تیز ہے اس لئے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت ت سے ∞ کے لئے صفر ہے دفعہ ۲۴ (۲) دیکھو۔

۱۶۸ - خاص تکملہ کی تعیین -

اب ہم مستقل سروں والی دوسرے رتبہ کی خطی مساوات کا خاص تکملہ دریافت کرینگے جبکہ مساوات کا بایاں جانب بھی وجود رکھتا ہو۔

پس (عف + ا + عف + ب) ما = ص (۱)
جہاں ص متغیر لا کا ایک معلومہ تفاعل ہے۔
جیسے اوپر بیان ہو چکا ہے اس کا کوئی بھی خاص تکملہ خواہ کسی طرح دریا ہوا ہو، حل کے لئے کافی ہوگا۔

پس خاص تکملہ میں سے ایسی رقوم کو نظر انداز کر سکتے ہیں جو متعم تفاعل میں واقع ہوتی ہیں کیونکہ یہ مساوات (۱) کے دائیں جانب میں کسی رقم کا اضافہ نہیں کرینگے۔ برعکس اس کے ضرورت کے لحاظ سے ہم خاص تکملہ میں متعم تفاعل کی کتنی بھی رقمیں جمع کر سکتے ہیں۔

نیز اگر ص رقوم کا مجموعہ ہو تو ما کی وہ قیمتیں دریافت کرنی ہیں جنکو مساوات (۱) کی دائیں جانب میں درج کرنے سے بائیں جانب کی مختلف رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔ خاص تکملہ ما کی ان قیمتوں کا مجموعہ ہوگا۔ یہاں صرف نہایت کارآمد صورتوں پر غور کرنا کافی ہوگا۔

(۱) اگر ص میں اس نمونہ ح ہو (۲)

کی رقم موجود ہو تو خاص تکملہ میں متناظر رقم ہوگی

$$م = \frac{ح}{ع + عا + عو} \times \frac{ع}{فو} \quad (۳) \dots \dots \dots$$

کیونکہ اگر (۳) کی بائیں جانب پر فعال (ع + عا + عو + ب) سے عمل کریں تو (۲) حاصل ہوتا ہے۔

یہ ضابطہ ناکام رہتا ہے اگر عا + عو + ب = ۰۔

یعنی اگر فو تسم فعال کی ایک رقم ہو۔

پہلے دفعہ کی ترقیم میں فرض کرو کہ عا = ۰ یعنی ذیل کی مساوات کو حل کرتا ہے

$$(ع - ل) - (ع - ل) = ح = ح \quad (۴) \dots \dots \dots$$

اگر (ع - ل) = ما = می لکھیں تو اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(ع - ل) - (می) = ح = ح \quad (۵) \dots \dots \dots$$

دفعہ ۱۵۷ (۲) میں یہ بتایا گیا ہے کہ (۶) کا خاص تسملہ ہے

$$(می) = ح - ح = ح \quad (۶) \dots \dots \dots$$

اب صرف مساوات (ع - ل) = ما = می فو

کا حل مطلوب ہے۔ اس کا تکمیل جزو نمبر ۱ فو ہے

$$(ع - ل) = ح - ح = ح \quad (۷) \dots \dots \dots$$

بائیں جانب کو باکھنن تکمیل کرنے سے اور منہم فعال میں جو رقمیں حاصل ہو چکی ہیں انکو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ح}}{\text{لا} - \text{لما}} \times \frac{\text{لا} - \text{لما}}{\text{لا} - \text{لما}} = \frac{\text{ح}}{\text{لا} - \text{لما}}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{ح}}{\text{لا} - \text{لما}} = \text{ما} \quad (۱۰) \dots \dots \dots$$

اگر عہ مساوات عفا + عفا + ج = کی دوہری اصل ہو تو مزید ترمیم کی ضرورت ہے۔
اب حل طلب مساوات اس شکل کی ہے

$$\text{(عفا - لما)}^2 = \text{ح} \quad (۱۱) \dots \dots \dots$$

حل کا پہلا قدم وہی ہے لیکن اب بجائے (۸) کے مساوات ہے

$$\text{(عفا - لما)} = \text{ح} \quad (۱۲) \dots \dots \dots$$

دفعہ ۱۵ (۳) میں دریافت کیا گیا تھا کہ اس کا خاص تکملہ ہے

$$\frac{1}{\text{ح}} = \frac{\text{لا} - \text{لما}}{\text{لا} - \text{لما}} \quad (۱۳) \dots \dots \dots$$

نتائج کی صورتیں ایک دفعہ قائم کر دینے کے بعد طالب علم اس میں بہت سہولت پائے گا کہ حسب موقع

$$\text{ما} = \text{عفا} - \text{لما} \quad \text{ما} = \text{عفا} - \text{لما} \quad \text{ما} = \text{عفا} - \text{لما} \quad (۱۴) \dots \dots \dots$$

میں سے مناسب حل کو فرض کرے اور مساوات

$$\text{(عفا + عفا + ج)} = \text{ح} \quad (۱۵) \dots \dots \dots$$

میں درج کر کے ہر کی قیمت دریافت کرے۔

دفعہ ۱۶۹ میں جو ضابطے دیے جائیں گے ان کی وجہ سے حل میں بہت آسانی واقع ہوگی۔

(۲) اگر s میں $ح$ جم $علا + گ$ جب $علا$ (۱۶)
کے نوٹ کی رقم موجود ہو تو فرض کرو کہ

ما = $ا$ جم $علا + ب$ جب $علا$ (۱۷)
مساوات (۱) میں درج کرنے سے دائیں جانب مساوی ہے
(- $علا + د$ $علا + ب$ + $ب$ (ل) جم $علا$

+ (- $علا + ب$ - $د$ $علا + ب$ جب $علا$
کے - پس جملہ (۱۶) کی رقم پیدا ہوگی بشرطیکہ

(- $علا + ب$ (ل) $د$ $علا + ب$ = $ح$ - $د$ $علا + ب$ (ب) $ب$ = $گ$

(۱۸)

سوائے اس خاص صورت کے جبکہ $د = ۰$ ، $علا = ب$ (جس پر ابھی غور
کیا جائیگا) ان مساواتوں سے (ل) $ب$ دریافت ہو سکتے ہیں -

پس $ا = \frac{(-علا + ب) ح - د علا + گ}{(-علا + ب) د علا + د علا + ب} = \frac{د علا ح + (-علا + ب) گ}{(-علا + ب) د علا + د علا + ب}$

(۱۹)
اگر تفرقی مساوات میں $سرد$ صفر ہے تو مذکورہ بالا نتائج میں اختصار
ہو سکتا ہے - ظاہر ہے کہ مساوات

$\frac{ف}{د} + ب = ما = ح$ جم $علا + گ$ جب $علا$ (۲۰)
کا خاص تکملہ ہوگا

ما = $ب - علا$ جم $علا + ب - علا$ جب $علا$ (۲۱)
لیکن اگر $علا = ب$ تو مل میں مشکل پیدا ہوتی ہے - اس صورت میں
حل کی مناسب شکل کے لئے فرض کرو کہ

ما = $ع$ جم $علا + و$ جب $علا$ (۲۲)
اس کو درج کرنے سے

۴۳۴

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{علا} = (۲ \text{ عفا} + \text{عفا} + \text{عفا}) \text{ جم علا}$$

..... (۲۳) (۲۰ عفا + عفا + عفا) بچہ علا

پس اس صورت میں مساوات (۲۰) پوری ہوگی بشرطیکہ

$$\text{عفا} = \frac{\text{ک}}{\text{علا}} ، \text{عفا} = \frac{\text{ج}}{\text{علا}}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ع} = \frac{\text{ک}}{\text{علا}} ، \text{و} = \frac{\text{ج}}{\text{علا}} \quad \text{..... (۲۴)}$$

اسلئے خاص نمکدہ ہے $\text{ع} = \frac{\text{ج}}{\text{علا}}$ (اجب علا) - $\frac{\text{ک}}{\text{علا}}$ لا جم علا (۲۵)

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = \text{فو} + \text{فو} \quad \text{..... (۲۶)}$$

دفعہ ۱۶۰ مثال (۱) کے مطابق اسکا تسمم تفاعل ہے

$$\text{ما} = (\text{فو} + \text{ج}) \text{ فو}$$

اگر فرض کیا جائے کہ $\text{ما} = \text{م فو}$ تو مساوات (۲۶) کے دائیں جانب میں درج کرنے سے بائیں جانب کی پہلی رقم مائل ہوتی ہے بشرطیکہ $\text{م} = \frac{۱}{۴}$ ، بائیں جانب کی دوسری رقم مذکورہ بالا استثنیٰ صورتوں میں سے ہے کیونکہ (۳) جبریہ مساوات $\text{لما} + \text{لما} = \text{و} = \text{ک}$ کی اصل ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ $\text{ما} = \text{م فو}$ تو درج کرنے پر

زیر غور دوسری رقم مائل ہوتی ہے بشرطیکہ $\text{م} = \frac{۱}{۵}$ اسلئے (۲۶) کا مکمل حل ہے

$$\text{ما} = (\text{فو} + \text{ج}) \text{ فو} + \frac{۱}{۴} \text{ فو} - \frac{۱}{۵} \text{ فو} \quad \text{..... (۲۷)}$$

$$\text{مثال (۲)} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = \text{فو} + \text{فو} \quad \text{..... (۲۸)}$$

دفعہ ۱۶، مثال (۲) میں تہتم تفاعل دریافت کیا گیا ہے اور وہ یہ ہے

$$ما = (لا + جب) قو$$

بائیں جانب کی پہلی رقم حاصل کر نیچے لے فرض کرو کہ ما = قو اور س سے حاصل ہوگا $\frac{۱}{۱۶}$ دوسری رقم لہا میں مساوات کی دوسری اہل کے جواب میں

$$اسلے ما = قو فرض کرنے سے حاصل ہوگا $\frac{۱}{۴}$$$

اس لئے (۲۸) کا مکمل ہے

$$ما = (لا + جب) قو + \frac{۱}{۱۶} قو + \frac{۱}{۴} قو + \dots (۲۹)$$

مثال (۳) مساوات

$$\frac{ف}{وقت} + گ = \frac{ف}{وقت} + ما = ف (جم (پات + صم) \dots (۳۰)$$

کا خاص نمبر دریافت کرو۔

یہ زفاس کی حرکت کی مساوات ہے بلکہ اس پر فراہمیت زفار کے متناسب عمل کر رہی ہے اور قوت وقت کا سادہ موسیقی تفاعل ہے۔

$$فرض کرو کہ لا = (جم (پات + صم) + جب جب (پات + صم) ۴۳۵$$

(۳۱) - - - - -

انکو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{cases} پ = (گ + جب + ما) = ف \\ پ = گ + پ = (ما + جب) = ۰ \end{cases} (۳۲)$$

$$اس لئے (ما + جب) = ف = گ + پ = (ما + جب) = ف$$

(۳۳) - - - - -

$$اگر کہیں (ما + جب) = صم = صم = صم (۳۴) - - - - -$$

(۴) سا (عف) کے انہیں معنوں کے مطابق اگر ع، لا کا کوئی تفاعل ہو تو

سا (عف) $\overset{لا}{فو} = \overset{لا}{فو}$ سا (عف + لا) ع (۵)

کیونکہ ترتیب وار حاصل ہوتا ہے

عف $\overset{لا}{فو} = \overset{لا}{فو}$ (عف + لا) ع

عف $\overset{لا}{فو} =$ عف { $\overset{لا}{فو}$ (عف + لا) ع }

$=$ $\overset{لا}{فو}$ (عف + لا) (عف + لا) ع

$=$ $\overset{لا}{فو}$ (عف + لا) ع

اور اسی طرح عام طور پر

عف $\overset{لا}{فو} = \overset{لا}{فو}$ (عف + لا) ع

پس عال سا (عف) کی مختلف رقموں سے نتیجہ (۵) کی متناظر
رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۳) اگر سا (عف) میں عف کی صرف جفت قوتیں ہوں تو
اسے فنا (عف) سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ دفعہ ۶۴ سے معلوم ہے
کہ اگر

ع = اجم عا لا + جب جب عا لا (۶)

تو عف $\overset{لا}{ع} =$ عا ع

اور اسلئے فنا (عف) ع = فنا (ع) ع (۷)

۱۷۰۔ مستقل سروں الی عام تفرقی مساوات۔ متمم تفاعل۔

مساوات فنا (عف) عا =۔ (۱)
کا عام حل دریافت کرنا ہے۔

مساوات (۱) کامل جس میں ت اختیاری کتنی شریک ہیں۔ ہوگا

$$\text{ما} = \text{ج} \text{ شو} + \text{ج} \text{ شو} + \dots + \text{ج} \text{ شو} \quad (۱۰)$$

دفعہ ۱۶۷ (۱۵) دیکھو۔
 اگر مساوات (۷) کی بعض اصلیں ہیں تو (۱۰) کے بائیں جانب کی دو یا زیادہ
 نہیں ایک دوسرے سے لڑ کر ایک ہو جاتی ہیں اور جدا گانہ طواری
 تعدادن سے کم ہو جاتی ہے۔ مگر پورا کرنے کے لئے ہمیں معلوم ہے کہ
 اگر (۷) مساوات (۷) کی رتبہ کی اصل ہے تو (عف) میں ایک
 جزو ضروری (عف۔ ل) ہوگا۔

$$\text{مساوات (عف۔ ل) ما} = \dots \quad (۱۱)$$

کو حل کرنے کے لئے فرض کر دو

$$\text{ما} = \text{شو} \text{ می} \quad (۱۲)$$

اور (۱۱) میں درج کرنے سے دفعہ ۱۶۲ (۱۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{(عف۔ ل) ما} = \text{عف۔ ل} \text{ شو} \text{ می} = \text{شو} \text{ می} \times \text{عف} \text{ می}$$

ظاہر ہے کہ عف می = کامل می = ب + ب + ل + ... + ب + ل

$$\text{اِس لئے ما} = \text{شو} \text{ (ب + ب + ل + ... + ب + ل)} \quad (۱۳)$$

پس (عف) کے رتبہ کے جزو ضروری بواوب میں اس حل میں
 اختیاری مستقل ہیں۔ دفعہ ۱۶۷ (۱۵) دیکھو۔

اگر (عف) کا ایک جزو ضروری درجی جملہ ہو جو ناقابل تحویل ہو
 مثلاً عف + عف + ب ہو جہاں ب و عف قابل تحویل کے
 قسم تغافل کا ایک حصہ ذیل کی مساوات کامل ہوگا

$$\text{(عف + عف + ب) ما} = \dots \quad (۱۴)$$

اگر اس میں رکھیں

$$\text{ما} = \text{قو}^{\frac{1}{4}} \text{ می اور بیما} = \text{ب} - \frac{1}{4} \text{ و} \dots \dots \dots (15)$$

تو وضعہ ۱۶۹ (۵) سے

$$(\text{عفا} + \text{و عفا} + \text{ب}) \text{ ما} = \{ (\text{عفا} + \frac{1}{4}) + \text{بیما} \} \text{ قو}^{\frac{1}{4}} \text{ می}$$

$$= \text{قو}^{\frac{1}{4}} \{ \text{عفا} + \text{بیما} \} \text{ می}$$

اور چونکہ $(\text{عفا} + \text{بیما}) \text{ می} = \text{کامل می} = \text{گجم بیما} + \text{گجم جب بیما}$

$$\text{ہے اسلئے ما} = \text{قو}^{\frac{1}{4}} (\text{گجم بیما} + \text{گجم جب بیما}) \dots \dots \dots (16)$$

اور یہ نتیجہ وضعہ ۱۶۷ (۲۲) کے مطابق ہے۔ پس $\text{ف} (\text{عفا})$ کے ہر جداگانہ ناقابل تحویل دو درجی جزو ضربی کے جواب میں دو اختیاری مستقلوں والا حل حاصل ہوتا ہے۔

بالآخر اگر $\text{ف} (\text{عفا})$ میں ایسے ناقابل تحویل دو درجی جملے ہیں جو ر مرتبہ واقع ہوتے ہیں تو مساوات

$$(\text{عفا} + \text{و عفا} + \text{ب}) \text{ ما} = \dots \dots \dots (17)$$

کو حل کرنا ہوگا۔ اب بال (۱۵) کو پھر استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{عفا} + \text{بیما}) \text{ می} = \dots \dots \dots (18)$$

اس کا حل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$\text{می} = \text{عجم بیما} + \text{عجم جب بیما} \dots \dots \dots (19)$$

اب تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{عفا} + \text{بیما}) \text{ عجم بیما} = ۲ \text{ بیما} (\text{عفا} + \text{عجم بیما}) + \text{عجم جب بیما} + \dots \dots$$

$$(\text{عفا} + \text{بیما}) \text{ عجم جب بیما} = ۲ \text{ بیما} (\text{عفا} + \text{عجم جب بیما}) + \dots \dots$$

اور عام طور پر

(عفا + بیاض) جو جم بیاض = (۲ بیاض) (عفا سے) جم (بیاض + $\frac{17}{4}$) + ... + (۲۰)۔
 آئیں ۷ کے کم سے کم رتبہ والے شتق کی رقم کو لکھا گیا ہے۔
 اس طرح

(عفا + بیما) کو جب بیما لا = (۲ بیما) (عفا و) جب (بیما لا + $\frac{\pi}{4}$) + (۳۱)
 پس رشتہ (۱۹) مساوات (۱۸) کو پورا کر گیا بشرطیکہ
 عفا = ۶ = عفا و =

(۲۲) {
-۱-) لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا
یعنی ع = ه + ه + لا + لا + لا + لا + لا + لا
(۲۳) {
-۱-) گ + گ + لا + لا + لا + لا + لا + لا
اور و = گ + گ + لا + لا + لا + لا + لا + لا

پس مساواتوں (عف - م) ما =، (عف + م) ما =، (عف + م) ما =، کے حلوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$M = \text{افو}^M + \text{ب فو}^M + \text{جم م}^M + \text{گ جب م}^M + \dots (28)$$

مثال (۳) $\frac{فر۳}{فر۴} + \frac{فر۲}{فر۳} + ما = ۰$. . . (۲۹)

یہ معادل ہے $(\text{عفا} + \text{عفا}) / (\text{عفا} - \text{عفا}) = 1$ کے۔

اس لئے $\text{ما} = \text{قو} \left(\frac{\text{ارجم}}{\text{ا}} \right) \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \right) + \text{جب جب} \left(\frac{\text{ما}}{\text{ا}} \right) \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \right)$

$$+ \text{فَوَاجِم} \frac{1}{p} \frac{1}{q} + \text{بَاجِب} \frac{1}{p} \frac{1}{q} + \dots (30)$$

مثال (۴) $\frac{فرما}{فرلا} + م + \frac{فرما}{فرلا} م = م$ (۳)

اس کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$= 6$$

اسے ۶ = (ج + ہ) + (ج + م) + (گ + گ) + (ج + م) + (۳۲)

۱۷۱۔ خاص تیمار -

اب ہم مساوات $f = (c/v)$ کا = مساوی (۱)
کے خاص نمبر کی ذیل کی دو اہم صورتوں پر غور کریں گے۔

(آ) اگر میں ^{اعمال} ج فو (۲)

کے نمونے کی ایک رقم شریک ہے تو خاص تھم لہ کی مناسط رقم ہوگی

ما = $\frac{2}{f_n(\text{عنا})}$... (3)

یہ ضابطہ بے کار ہو جاتا ہے اگر فہا = (عفا + عفا) یعنی جبکہ فہا (عفا) میں
عفا + عفا بطور جزو ضربی کے شریک ہے۔ اس صورت میں (۱۱) کے
ہونے کی زمیں شتم اتفاق میں موجود ہوگی۔
اگر جزو ضربی (عفا + عفا) صرف ایک مرتبہ واقع ہو تو کہہ سکتے ہیں
فہا (عفا) = سہا (عفا) (عفا + عفا) (۱۲)

اب سادات

سہا (عفا) (عفا + عفا) ما = ح جم عفا لا + ک جب عفا لا (۱۶)
پوری ہوگی بشرطیکہ

(عفا + عفا) ما = ح جم عفا لا + ک جب عفا لا (۱۸)
ہذا یہ سوال دفعہ ۱۶۸ (۲) کی حل شدہ صورت میں تحویل ہو جاتا ہے۔
پس خاص نمبر ہوگا

ما = ح جم عفا لا + ک جب عفا لا (۱۹)
۲ عفا سہا (عفا) ۲ لجب عفا لا ۲ عفا سہا (عفا) ۲

اگر فہا (عفا) میں (عفا + عفا) بطور جزو ضربی (۲) مرتبہ شریک ہو تو
فہا (عفا) = سہا (عفا) (عفا + عفا) (۲۰)
اور زیر غور سوال 'ذیل کی سادات کے خاص نمبر دریافت کرنے میں تحویل
ہو جاتا ہے

(عفا + عفا) ما = ح جم عفا لا + ک جب عفا لا (۲۱)
۲ عفا سہا (عفا) ۲ جم عفا لا ۲ عفا سہا (عفا) ۲
اگر فرض کیا جائے کہ
ما = ح جم عفا لا + ح جم عفا لا + ح جم عفا لا (۲۲)

[ہذا مفروضہ ما = ح جم عفا لا + ح جم عفا لا + ح جم عفا لا لکھنا ہی کارگر ہوگا لیکن اوپر کے مضامین میں
مختلف شکل سوچتے چھٹکتے ہیں کہ اسکی صورت آخری نتیجہ نہایت عجیبہ شکل میں لکھا جاسکتا ہے]

تو دفعہ ۱۰۰ (۲۰) (۲۱) سے

(عفا + عفا) = م = (عفا) × عفا + جم عفا لا + (عفا) × عفا و جب عفا لا
پس مساوات (۲۱) پوری ہوگی بشرطیکہ

$$\text{عفا} = \frac{\text{ح}}{\text{سا (عفا)}} = \frac{\text{عفا}}{\text{سا (عفا)}} = \frac{\text{ک}}{\text{سا (عفا)}} \quad (۲۳)$$

$$\text{یعنی ع} = \frac{\text{ح لا}}{\text{سا (عفا)}} = \frac{\text{ک لا}}{\text{سا (عفا)}} \quad (۲۴)$$

اس لئے خاص تکملہ ہوگا

$$\text{م} = \frac{\text{ح لا}}{\text{سا (عفا)}} = \left\{ \text{ح لا} + \text{ک لا} \right\} \frac{\text{عفا}}{\text{سا (عفا)}} \quad (۲۵)$$

(۲۵)

عام صورت میں ف (عفا) نیز عفا کی جنت اور طری دو نول تو میں
موجود ہوتی ہیں اور اسی طرح مفروض (۲۴) کا اگر نہیں ہوتا جبکہ ف (عفا)
میں عفا + عفا بطور جزو ضربی کے شریک ہے۔ اس لئے لکھو

$$\text{ف (عفا)} = \text{سا (عفا)} \quad (۲۶)$$

جہاں سا (عفا) میں (عفا + عفا) بطور جزو ضربی شریک ہیں ہے۔
سب سے پہلے مساوات

$$\text{سا (عفا)} = \text{م} = \text{ح جم عفا لا} + \text{ک جب عفا لا} \quad (۲۷)$$

کا خاص تکملہ ذیل کی شکل میں حاصل ہوتا ہے

$$\text{م} = \text{ح جم عفا لا} + \text{ک جب عفا لا} \quad (۲۸)$$

اب صرف یہ مساوات حل کرنا باقی ہے

$$\text{(عفا + عفا) م} = \text{ح جم عفا لا} + \text{ک جب عفا لا} \quad (۲۹)$$

اور اس پر اور غور ہو چکا ہے۔

(۳) ایک اور صورت جس کا خاص تکملہ دریافت ہو سکتا ہے وہ ہے

$$\text{ف (عفا)} = \text{م} = \text{لا} \quad (۳۰)$$

درجے کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اگر m, n ، اسکی اصلیں ہوں تو حل ہوگا

$$ma = mb + na \quad (۵)$$

نیز مساوات $\frac{a}{m} + \frac{n}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ کا خاص تکملہ

$$ma = mb + na \quad (۶)$$

ہوگا بشرطیکہ

اگر m میں مساوات کی اصلیں خیالی ہوں یا مساوی ہوں تو مشکلات پیدا ہوتی ہیں۔

نیز اگر m میں a کے نمونے کی رقم شریک ہے جبکہ m میں مساوات کی ایک اصل a ہے تو خاص تکملہ کے دریافت کرنے میں فریب مشکلات پیدا ہوتی ہیں۔ بہر صورت میں خاص تحقیقات سے بچنے کے لئے ہم ثابت کریں گے کہ متبوع متبوع بدلتے سے مساوات (۱) مستقل سروں والی خطی آخری مساوات میں ہمیشہ تحویل کی جاسکتی ہے۔

اگر کہیں $a = b$ تو a کے کسی تقاضے کے لئے

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \div \frac{a}{m} = \frac{b}{n} \quad (۷)$$

یعنی $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ (۸)

ہم عام $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ کو (جولا $\frac{a}{m}$ کے مساوی ثابت کیا گیا ہے) طے کیا ہو کر گئے۔

۲۲۵

$$ق = ج ر$$

فرض کرو کہ

مساوات میں درج کرنے سے $م (۱-۴) + ۴۲ = ۰$ یعنی $م (۱+۴) = ۰$ حاصل ہوتا ہے
پس $م$ کی قابل قبول قیمتیں صفر اور -۱ ہیں اور اس لئے حاصل ہوگا

$$ق = ۱ + \frac{ج}{ر} \dots \dots \dots (۱۶)$$

دفعہ ۱۶۵ مثال (۲) دیکھو۔

$$\text{مثال (۲)} \quad لا^۲ \frac{فرما}{فرلا} + ۲ لا - \frac{فرما}{فرلا} = ۲ لا^۲ \dots \dots \dots (۱۷)$$

نعمت تفاعل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ $ما = ج لا^۲$

$$تو ۴ (۱-۴) + ۴۲ = ۰ \text{ یعنی } ۴ (۱-۴) (۱+۴) = ۰$$

اس لئے $۴ = ۱$

$$\text{نیز } ما = ج لا^۲ \text{ خاص تکملہ ہوگا بشرطیکہ } (۱-۲) (۲+۲) ج = ۱ \text{ یا } ج = \frac{۱}{۴}$$

$$\text{اس لئے } ما = ۱ لا + \frac{ج}{لا} + \frac{۱}{۴} لا^۲ \dots \dots \dots (۱۸)$$

$$\text{مثال (۳)} \quad لا^۲ \frac{فرما}{فرلا} - لا \frac{فرما}{فرلا} + ما = لا^۲ \dots \dots \dots (۱۹)$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\{ لا^۲ ا - ا - (۱-۴) + ۱ \} ما = ۴$$

$$\{ لا^۲ ا - ا - ۱ + ۴ \} ما = ۴$$

مختلف ترقیم کا خیال کرتے ہوئے دفعہ ۱۶۷ سے اسکا حل ہوگا

$$ما = (۱ + ج ط) (۴ ط) + \frac{۱}{۴} ط^۲ ط$$

یعنی $لا$ کی رقوم ہیں

$$ما = (۱ + ج لوک لا) لا + \frac{۱}{۴} لا (لوک لا) \dots \dots \dots (۲۰)$$

مثال (۳)۔ لا^۲ فرما^۲ + لا^۲ فرما^۲ + لا^۳ = ما^۳ (۲۱)

اس لئے (طا + ا) ما^۲ = فو^۲

پس ما^۲ = اجم طا + جب طا + فو^۲

= اجم (لوک لا) + جب (لوک لا) + ۱/۱۰ لا^۳ (۲۲)

۱۷۳۔ ہمزاد تفرقی مساواتیں۔

حرکات اور دیگر مضامین کے سوالات میں اکثر ہمزاد تفرقی مساواتوں کے ایسے نظاموں سے واسطہ پڑتا ہے جنہیں ایک متنوع متغیر کے دو یا زیادہ متغیرات اور ان کے تفرقی سر موجود ہوتے ہیں۔ لیکن ہمیشہ مساواتوں کی تعداد تابع متغیروں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

ہم تابع متغیروں کو حروف لا، ما، سے اور متنوع متغیر کو ت سے ظاہر کریں گے۔

عام نظریہ کے مسائل پر غور کرنے کی بجائے یہاں چند مثالیں دے کر کافی ہموکا جن سے عام طور پر کثیر الاستعمال طریقوں کی توضیح ہوگی۔
اول یہ ممکن ہے کہ ہر ایک دی ہوئی مساوات میں صرف ایک تابع متغیر موجود ہو اور اس لئے ان پر علیحدہ علیحدہ غور ہو سکتا ہو۔

مثال (۱)۔ باذہابض کے زیر عمل مری کی صورت میں اگر لا اور ما محور افقی اور محور انتصابی ہوں تو

$$\frac{فرما^2}{فرت^2} = \frac{فرما^2}{فرت^2} - ج (۱)$$

پس لا = اجات، ما = ب + جات، ۱/۱۰ جات (۲)

اختیاری مستقلوں ل، ا، ب، ج سے مقام اور رفتار کے بارے میں چار ابتدائی شرائط پوری ہو سکتی ہیں۔

مثال (۲)۔ ایک ذرہ کی صورت میں جس پر ایک ثابت مرکز (مبداء) سے فاصلہ کے متناسب قوت کشش عمل کر رہی ہے

$$\frac{فر}{فر} = - مالا \quad \frac{فر}{فر} = - مالا \quad \dots \dots (۳)$$

اس لئے لا = اجم امات + ارجب امات

$$ما = جب جم امات + جب جب امات$$

ان میں سے ت کو ساقط کرنے سے

$$(جب) لا - (ا) ما = (جب) لا - (ا) ما = (ا) جب - (ا) جب \dots (۴)$$

اس سے ظاہر ہے کہ حرکت کا طریق قطع ناقص ہے۔

اگر وہی مساواتیں جو تعداد میں ت ہیں اس سادہ نمونے کی نہ ہوں تو تفرق اور جبر یہ عمل کی مدد سے تمام متبور متغیروں 'لا' 'ما' 'ی' کو سوائے ایک متغیر (مثلاً لا کے) ساقط کیا جاسکتا ہے۔ مصلیٰ مساوات کو متحمل کر نیٹے بعد اگر لا کی عام تہیت مساواتوں کے ابتدائی نظام میں درج کی جائے تو معلوم ہوگا کہ نظام میں (ن-۱) مساواتیں باقی رہ جاتی ہیں جن میں (ن-۱) تابع متغیر 'ما' 'ی' ... شریک ہیں۔ اس عمل کو بار بار دہرایا جاسکتا ہے حتیٰ کہ ہر ایک تابع متغیر اور اختیاری مستقلوں کی رقوم میں بیان ہو جائے۔ خاص صورتوں میں زیادہ متشاکل عمل استعمال ہو سکتا ہے۔ ہم مجموعی سوالات کی چند مثالوں پر اکتفا کریں گے۔

مثال (۳)۔ اگر مبداء کے گرد زاوی زقارون سے گھومنے والے مستوی کے کسی ایک نقطہ کے محدود 'ما' ہوں

$$فر = - ن ما \quad \frac{فر}{فر} = - ن لا \quad \dots \dots (۵)$$

$$ما کو ساقط کرنے سے \quad \frac{فر}{فر} = - ن \quad \frac{فر}{فر} = - ن لا$$

اسے $لا = (جم + ن + ت + صر)$ (۶) - - - - -
 جہاں $لا$ اور $صر$ اختیاری مستقل ہیں۔
 (۵) کی پہلی مساوات میں $لا$ کی اس قیمت کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے
 $ما = (جب + ن + ت + صر)$ (۷)
 نتیجوں (۶) اور (۷) سے ظاہر ہے کہ ہر نقطہ میدان کے گرد زوای رفتار سے
 دائرے بناتا ہے۔
 مثال (۸) :- برق، مقناطیسی امالہ کے نظریہ میں ذیل کی مساواتیں نمودار
 ہوتی ہیں

$$(۸) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} ل = \frac{فر}{فرت} + م + \frac{فر}{فرت} + ص = ق \\ م = \frac{فر}{فرت} + ن + \frac{فر}{فرت} + س = ف \end{array} \right.$$

یہاں $لا$ ، $ما$ باہم متاثر دو دوروں میں برقی رویوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ $ص$ اور
 $س$ دوروں کی فراغتیں ہیں، $ل$ اور $ن$ ذاتی امالوں کی شرحیں، $م$ باہمی
 امالہ کی شرح، اور $ق$ ، $ف$ بیرونی محرکہ برق قوتیں ہیں۔
 اول فرض کرو کہ $ق = ۰$ ، $ف = ۰$ تب

$$لا = (فو) ، ما = (ب) فو \dots \dots \dots (۹)$$

سے مساواتیں (۸) پوری ہونگی بشرطیکہ

$$(۱۰) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} (ل + ص) + (م + ل) = جب \\ (م + ل) + (ن + س) = ف \end{array} \right.$$

ان میں سے نسبت $لا$ ، $ب$ کو سا قی کر کے

$$(ل + ص) + (ن + س) - (م + ل) = ۰$$

یعنی $(ل - ن - م) + (ل + س + ص) = ۰$ (۱۱)
 چونکہ $(ل + س) + (ن + م) = (ل - ن - م) + (ل + س + ص) + م + ص$

جو ایک مثبت مقدار ہے، اس لئے ظاہر ہے کہ دو درجی مساوات (۱۱) کی اصلیں ہمیشہ حقیقی ہوں گی۔

نیز طبیعی وجوہات پر لائن لازمًا m^2 سے بڑا ہے۔ پس (۱۱) سے ظاہر ہے کہ لہا کی دونوں اصلوں کی علامت ایک ہی ہوگی کیونکہ ان کا حاصل ضرب مثبت ہے اور یہ علامت منفی ہوگی کیونکہ ان کا حاصل جمع منفی ہے۔

پس اصلوں کو - لہا، - لہا لکھنے سے حل حاصل ہوتے ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{ار}، \text{فو} - \text{لہا}، \text{ما} = \text{حب}، \text{فو} - \text{لہا} \\ \text{لا} = \text{ار}، \text{فو} - \text{لہا}، \text{ما} = \text{حب}، \text{فو} - \text{لہا} \end{array} \right. \dots \dots (۱۲)$$

جہاں مستقلوں $\text{ار}، \text{حب}، \text{یا}، \text{ار}، \text{حب}$ میں رشتہ (۱۰) میں سے کسی ایک مساوات میں لہا کی بجائے - لہا، یا - لہا لکھنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی دراصل اختیاری مستقلوں کی تعداد صرف دو رہ جاتی ہے۔ مساواتیں (۸) کے خطی ہونے کی وجہ سے اس صورت میں جبکہ $\text{ق} = \text{ف} = ۰$ ۔

یہ مساواتیں بالترتیب لا اور ما کی مذکورہ بالا قیمتوں کے مجموعے سے پوری ہوتی ہیں، حل دور کی ابتدائی آزاد برقی رو کے کم ہوتے جانے کو ظاہر کرتا،

اگر ق اور ف صفر نہ ہوں بلکہ معلومہ مستقل ہوں تو ظاہر ہے کہ (۸) کا خاص بحملہ ہوگا

$$\text{لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ر}} \text{ اور } \text{ما} = \frac{\text{ف}}{\text{س}}$$

اس لئے مکمل حل ہوگا

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ر}} + \text{ار}، \text{فو} - \text{لہا} + \text{ار}، \text{فو} - \text{لہا} \\ \text{ما} = \frac{\text{ف}}{\text{س}} + \text{حب}، \text{فو} - \text{لہا} + \text{حب}، \text{فو} - \text{لہا} \end{array} \right. \dots \dots (۱۳)$$

جہاں ل، ا، ب میں اور ل، ا، ب میں رشتوں کا ذکر اوپر ہو چکا ہے۔
لا اور ما کی ان قیمتوں میں پہلی قیمتیں ان قاعموں کو ظاہر کرتی ہیں جو
دی ہوئی محرکہ برق قوتوں کی وجہ سے وجود میں آتی ہیں۔ باقی ماندہ نہیں مال
کے اثر کو ظاہر کرتی ہیں۔ چونکہ درحقیقت دو اعتیاری مستقل شریک ہیں اس لئے
انکی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں کہ برقی روؤں کی کوئی بھی دی ہوئی ابتدائی
قیمتیں ہوں۔

دوسری اہم صورت دو ہے جس میں ق وقت کا ساواہ موثر تھی تفاعل اور
ف صفر ہوتا ہے۔

اس طرح ق = ق + جم پ ت اور ف =۔ (۱۳)
رکنے سے مساوات (۸) کا خاص تکملہ ذیل کے مفروض سے حاصل ہو سکتا ہے۔

لا = ل + جم پ ت + (ج ب پ ت) (۱۵)
ما = ج ب جم پ ت + ج ب ج ب پ ت (۱۵)
لا اور ما کی ان قیمتوں کو درج کر کے جم پ ت اور ج ب پ ت کے
سروں کو علیحدہ علیحدہ صفر رکھنے سے

پ ل ل + پ م ج ب + ل ا = ق۔
پ ل ل - پ م ج ب + ل ا =۔
پ م ل + پ ن ج ب + م س ج ب =۔
پ م ل - پ ن ج ب + م س ج ب =۔ (۱۶)

ان رشتوں سے ل، ا، ب، ج، ب دریافت ہو سکتے ہیں۔ اس طرح
معلومہ دوری قوت محرکہ برق کے زیر اثر دونوں دوروں میں پیدا شدہ برقی
اہتزاز حاصل ہوتے ہیں۔ آزاد روؤں (۱۲) کی شکل کی رشتوں سے حاصل ہوتی
ہیں۔ ان کی قیمت ابتدائی حالات پر منحصر ہے لیکن ہر صورت میں جیسے
تسا برصا ہے یہ نابود ہو جاتی ہیں۔

مثال (۵)۔ بطور آخری مثال کے ذیل کی مساوات پر غور کرو۔

$$(۱۶) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{ا} \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} + \text{ح} \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} + \text{د} \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} + \text{ه} \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} = \text{لا} \\ \text{ح} \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} + \text{ب} \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} + \text{ه} \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} + \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} = \text{ما} \end{array} \right.$$

۶۲۹ یہ ایسے بقالی حرکیاتی نظام کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے جسے توازن کے مقام کی قربت میں دو درجے کی آزادی حاصل ہو آزاد حرکت دریافت کرنے کے لئے لا = ما = رکھو اور فرض کرو کہ

$$(۱۸) \dots \dots \dots \text{لا} = \text{ف} \text{فو} \text{، لا} = \text{گ} \text{گوت}$$

$$(۱۹) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{اسکے} \quad \text{ا} (\text{لا} + \text{د}) + \text{ف} + \text{ح} (\text{لا} + \text{ه}) + \text{گ} = ۰ \\ \text{ح} (\text{لا} + \text{ه}) + \text{ف} + \text{ب} (\text{لا} + \text{د}) + \text{گ} = ۰ \end{array} \right.$$

ان میں سے نسبت ف : گ کو سا قط کرینے سے

$$(۲۰) \quad \text{ا} (\text{لا} + \text{د}) + \text{ف} (\text{ب} + \text{لا}) - \text{ح} (\text{لا} + \text{ه}) = ۰$$

$$\text{یا} (\text{ا} - \text{ح}) \text{لا} + (\text{ا} + \text{ب} - \text{د} - \text{ه}) \text{لا} + (\text{ا} + \text{ب} - \text{د} - \text{ه}) \text{لا} = ۰$$

(۲۱) \dots \dots \dots

یہ لا میں دو درجہ مساوات ہے

$$(۲۲) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{جملات} \quad \text{ا} (\text{لا} + \text{د}) + \text{ف} + \text{ح} (\text{لا} + \text{ه}) + \text{گ} = ۰ \\ \text{ح} (\text{لا} + \text{ه}) + \text{ف} + \text{ب} (\text{لا} + \text{د}) + \text{گ} = ۰ \end{array} \right.$$

اور $\frac{۱}{۲} (\text{لا} + \text{د} + \text{ه} + \text{ب} + \text{لا})$ بالترتیب نظام کی توانائی یا حرکت اور توانائی بالقوہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

ان میں سے پہلا جملہ لازماً مثبت ہے پس $\text{ا} - \text{ح}$ مثبت ہیں اور

$\text{ا} - \text{ح} > ۰$ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ (۲۰) یا (۲۱) کا دریاں جانب لا = ۰ اور لا = ۰ دونوں کے لئے مثبت ہوگا۔ اور لا = ۰ کے لئے

علامت وہی ہوگی جو $\text{د} - \text{ب} - \text{ه}$ کی ہے۔ نیز (۲۰) سے ظاہر ہے کہ

دیاں جانب لا = ۰ اور لا = ۰ کے لئے منفی ہوگا۔

پس اگر جملہ (۲۳) فی نفسہ منفی ہو یعنی و اور ب منفی ہوں اور و ب - ہ مثبت ہو تو مساوات (۲۱) لکھا کی دو مثبت اصلوں سے پوری ہوگی جنہیں

سے ایک اہل ہر دو مقدار - $\frac{1}{a}$ اور - $\frac{b}{b}$ سے بڑی ہے اور دوسری

اہل چھوٹی ہے۔

ان اصلوں کو لکھا، لکھا سے ظاہر کرنے سے حل حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{ف} + \text{فو} + \text{ف} + \text{فو} + \text{ف} + \text{فو} \\ \text{ما} = \text{گ} + \text{گو} + \text{گ} + \text{گو} + \text{گ} + \text{گو} \end{array} \right. \quad \text{..... (۲۲)}$$

ان آٹھ سرز میں سے اختیاری مستقل صرف چار ہیں نسبت ف: گ، (جوف: گ) کے مساوی ہے (۱۹) میں لکھا کی بجائے لکھا کہنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح نسبت ف: گ یا گ: ف، (مساوات ۱۹) میں لکھا کی بجائے لکھا کہنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یا ما ماندہ چار اختیاری مستقل کی مدد سے لا، ما، فرلا، فرما، کو کوئی بھی ابتدائی قیمت دیکھا سکتی ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ لا اور ما، ت کے ساتھ بے حد بڑھتے جائیں گے سوائے اس صورت کے کہ ابتدائی حالات کو اس طرح مرتب کیا جائے کہ

ف اور ف صفر ہوں۔ پس اگر مقام توازن میں کی توانائی یا نقوہ قریب کے کسی اور مقام کی توانائی سے زیادہ ہے تو کوئی خفیف اختیاری ہٹاؤ عموماً بڑھتا جائے گا پس مقام توازن، غیر قائم ہے۔

اگر اس کے برخلاف جملہ (۲۳) بدلتے مثبت ہو یعنی و، ب، و ب - ہ مثبت ہوں تو لکھا میں دو درجہ مساوات کی اصلیں دونوں منفی ہوگی اور ان میں سے ایک اہل صفر اور - $\frac{1}{a}$ - $\frac{b}{b}$ میں سے مقدار میں چھوٹی کے درمیان واقع ہوگی

اور دوسری اصل ان دونوں میں سے مقدار میں بڑی اور - ۵۵ کے درمیان ہوگی۔ اس سے ظاہر ہے کہ بجائے (۱۸) کے مناسب مفروضہ یہ ہے کہ

(۱۹) = ف + جم پ + ت + ف + جب پ + ت
ما = گ + جم پ + ت + گ + جب پ + ت (۲۵)
اس سے (۱۹) اور (۲۱) کی شکل کی مساواتیں حاصل ہونگی جنہیں لہذا کو بجائے
پ لکھ دیا گیا ہے۔ نیز اس سے ثابت ہوتا ہے کہ پ ایس دو درجی مساوات
کی انہیں حقیقی اور مثبت ہوگی۔ انہیں پ اور پ سے ظاہر کرنے سے
حاصل ہوتا ہے کہ حل ہے

(۱۹) = ف + جم پ + ت + ف + جم پ + ت + ف + جب پ + ت
ما = گ + جم پ + ت + گ + جب پ + ت + گ + جم پ + ت (۲۶)
جہاں نسبتیں $\frac{ف}{گ}, \frac{ف}{گ}, \frac{ف}{گ}, \frac{ف}{گ}$ مذکور بالا طریقہ پر دریافت
ہو سکتی ہیں۔

نیز چونکہ $\frac{ف}{گ} = \frac{ف}{گ}$ اور $\frac{ف}{گ} = \frac{ف}{گ}$ اس لئے نتیجے ذیل کی طرح
بھی لکھے جاسکتے ہیں

(۱۹) = ف + جم (پ + ت + ط) + ف + جم (پ + ت + ط)
ما = گ + جم (پ + ت + ط) + گ + جم (پ + ت + ط) (۲۷)

جہاں $\frac{ف}{گ}$ اور $\frac{ف}{گ}$ قابل تعین ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ اگر
مقام توازن میں توانائی بالعموم قریب مقاموں سے کم ہے تو خفیف ہواؤ
کی صورت میں نظام مقام توازن کے گرد اتنا تیزی حرکت کرے گا اور اس لئے
توازن قائم ہوگا۔

اس امر کو فرض کر لیا گیا ہے کہ لہذا (یا پ) میں دو درجی مساوات کی انہیں

الگ الگ ہیں۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اصلیں مساوی نہیں ہو سکتیں

سواۓ اس صورت کے جبکہ $\frac{1}{\text{ح}} = \frac{\text{ب}}{\text{ح}} = \frac{\text{ا}}{\text{ح}}$ اور اگر یہ

شراط پوری ہوں تو حل ذیل کے دو نمونوں میں سے کسی ایک نمونے کا ہوگا

لا = ح + ف + شو (لغت) ما = گ + گ + شو (لغت) گ = ل + ل (لغت) (۲۸)

یا لا = ف + جم پ + ت + ف + جب پ + ت

ما = گ + جم پ + ت + گ + جب پ + ت ... (۲۹)

جہاں ہر دو صورتوں میں چاروں مستقل ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں

آخر میں ہمیں اس صورت پر غور کرنا ہے جبکہ توانائی بالقوہ کے لئے جملہ

۳۳ کبھی مثبت ہے اور کبھی منفی۔ اس صورت میں لا جب۔ ح منفی ہوگا

اور نہ ہی دو درجی مساوات کی ایک اصل مثبت ہوگی اور دوسری اصل

منفی۔ یہاں حل ذیل کے نمونے کا ہوگا

لا = ح + ف + شو (لغت) ما = گ + گ + شو (لغت) گ = ل + ل (لغت)

یا لا = ف + جم پ + ت + ف + جب پ + ت

ما = گ + جم پ + ت + گ + جب پ + ت ... (۳۰)

اس سے ظاہر ہے کہ کوئی اختیاری خفیف ہوا عموماً بے دریغ ہوتا جائیگا

اس لئے اس مقام توازن کو غیر قائم شمار کرنا چاہئے۔

اس سوال کو حل کرنے کے ذرا دوسرے طریقے میں فرض کر دو کہ

ما = لا (۳۱)

زیر شرط مساویں اب ذیل کی شکل اختیار کرتی ہیں

(ا + ما ح) $\frac{\text{ف}}{\text{ت}} + (ا + ما ح) = لا$ (۳۲)

(ح + ما ب) $\frac{\text{ف}}{\text{ت}} + (ح + ما ب) = لا$

یہ دونوں مساوات سے یوری ہوتی ہیں بشرطیکہ

$$(۳۳) \dots\dots\dots \frac{۱}{۱۵} = \frac{۳ + ۵ + ۵}{۱۵} = \frac{۱۳}{۱۵}$$

پس مساوی دو درجی مساوات

$$(۳۴) \dots\dots\dots (۳ - ۵) + ۵ = (۳ - ۵) + ۵ = ۰$$

(۳۵) \dots\dots\dots

سے دریافت ہو سکتا ہے۔ اگر مساوی اور مساوی اسکی اصلیں ہوں تو لہذا کی مثال قیمتیں (۳۴) سے ملتی ہیں۔ اس طرح سے دو مل حاصل ہوتے ہیں جنکو تفرقی مساوات کے ملنے کی وجہ سے ایک دوسرے کے ساتھ شریک کر سکتے ہیں۔ اگر (۳۴) میں سے مساوی کو ساقط کر دیا جائے تو لہذا میں وہی ماور والی دو درجی مساوات مل جاتی ہے پس (۳۵) کی اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرطیں وہی ہوں گی جو (۲۱) کی صورت میں تھیں۔ اس امر کی باآسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔ اگر لہذا منفی ہے تو مل ذیل کے نمونے کا ہوگا

$$(۳۶) \dots\dots\dots \begin{aligned} & لا = ف + جم (پ + ط) \quad ما = مسا + ف + جم (پ + ت + ط) \\ & لا = ف + جم (پ + ت + ط) \quad ما = مسا + ف + جم (پ + ت + ط) \end{aligned}$$

جہاں ف، ف، ف، ط، ط، ط، اختیار ہی مستقل ہیں۔ ان میں سے ہر ایک مل بذات خود نظام کے ایسے اہتزاز کو ظاہر کرتا ہے جسے اسکی طبیعی کیفیت کہہ سکتے ہیں۔ صرف اہتزاز دریافت کر نیکے لئے جبکہ ذیل کے شکل کی قوتیں لا اور مسا عمل کر رہی ہیں

$$(۳۷) \dots\dots\dots \begin{aligned} & لا = مسا + جم (ن + ت + ط) \quad ما = مسا + جم (ن + ت + ط) \\ & فرض کرو کہ لا = ف + جم (ن + ت + ط) \quad ما = گ + جم (ن + ت + ط) \end{aligned}$$

اب مستقل ف اور گ، دے گا میں اندراج سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ اسکی تکامد رہنے کی ایک صورت وہ ہوگی جبکہ جملہ (۲۳) لازماً مثبت ہوا اور وہ

نہا' پیا' میں کی دو درجی مساوات کی ایک اصل سے منطبق ہو جائے گا۔

امثلہ ۵۶

رستقل سر

$$(۱) \quad \left[\text{ما} = \text{ا} + \text{ب} - \text{قو} \right] \quad \frac{\text{فرما}^۲}{\text{فرلا}^۲} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$$

$$(۲) \quad \left[\text{ما} = \text{ا} + \text{قو} + \text{ب} - \text{قو} \right] \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}^۲} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۱۰ = ۰$$

$$(۳) \quad \left[\text{ما} = \text{ا} + \text{قو} + \text{ب} - \text{قو} \right] \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}^۲} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۰$$

$$(۴) \quad \frac{\text{فرما}^۳}{\text{فرلا}^۳} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}^۱۱} - \text{ما} = ۰$$

$$\left[\text{ما} = \text{ا} + \text{قو} + \text{ب} - \text{قو} + \text{ج} - \text{قو} \right]$$

$$(۵) \quad \frac{\text{فرما}^۲}{\text{فرلا}^۲} = \text{ما}^۴ \quad \left[\text{ما} = \text{ا} + \text{قو} + \text{ب} - \text{قو} + \text{ج} - \text{ج} + \text{م} - \text{م} + \text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ا} \right]$$

$$(۶) \quad \frac{\text{فرما}^۳}{\text{فرلا}^۳} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}^۲} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$$

$$\left[\text{ما} = \text{ا} + \text{قو} + \text{ب} - \text{ج} - \text{م} + \text{ا} + \text{ج} - \text{ب} - \text{ا} \right]$$

$$(۷) \quad \frac{\text{فرما}^۲}{\text{فرلا}^۲} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (\text{م} + \text{ن}) = ۰$$

$$\left[\text{ما} = \text{قو} + \text{ا} + \text{ج} - \text{ب} - \text{ن} - \text{ا} \right]$$

$$(۸) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} = ۶۱۳ + [ما = قو (اجم ۳ + ب جیب ۳ لا)]$$

$$(4) \quad \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = 65 \quad [ما = قورا (ج ۲) + جب (ج ۲) + جب (ج ۲)]$$

$$(10) \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} = b_{13} + \dots [6 = \text{قو (اجم)} + \text{بج (بج)}]$$

$$(ii) \quad \frac{f}{f_0} = 1 + \frac{f}{f_0} \left(\frac{f}{f_0} \right) + \frac{f}{f_0} \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 + \dots$$

$$+ \left(\text{ج جنس } \frac{1}{4} + \text{د جنس } \frac{1}{4} \right) \left(\text{جیب } \frac{1}{4} \right)$$

$$(۱۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} = ۰ \quad [ما = (ا + ب + ج + د) ع]$$

$$(13) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = [ما - (ا + ب)] \frac{فرما}{فرلا}$$

$$(12) \quad \frac{\frac{6^3}{3} - \frac{6^2}{2} + \frac{6^1}{1}}{6^3 + \frac{6^2}{2} - \frac{6^1}{1}} = \frac{6}{6} = 1$$

$$(۱۵) \quad \frac{فرما}{در لا} - \frac{فرما}{لا} = م + \frac{(ا+ج لا)}{(هو+ج قو)} [$$

$$(14) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = [ا + ب + ج + د] = ا$$

$$= \frac{f_1}{f_2} + \frac{f_1}{f_2} (\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}) + \frac{f_1}{f_2} \quad (14)$$

[ما = (اجم) (م) لا + (ع) + (ج) جم (م) لا + (ب) با]

باب اول در بیان سادات فرزندان

شکل کا ہے

لا = (فو + جب) + صت

جہاں ص اور بہا دونوں مثبت ہیں (اگر گ اور ص مثبت ہیں) اور ص < بہا

$$(۱۹) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{م۲}{م۱} = \frac{فرما}{فرلا} + \frac{م۲}{م۱} = \text{جب} \text{ لا}$$

$$[\text{ما} = \frac{(م - ن) \text{ جب} \text{ لا} + م۲ \text{ ن} \text{ جم} \text{ لا}}{(م + ن)۲} + \dots \text{تم تعامل}]$$

$$(۲۰) \quad \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = \text{ما} = \text{جم} \text{ لا} [\text{ما} = \frac{۱}{۲} \text{ لا} \text{ فو} + \frac{۱}{۲} \text{ لا} \text{ فو} + \dots \text{تم تعامل}]$$

$$(۲۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = ۱ + \text{جم} \text{ لا} [\text{ما} = \frac{۱}{۲} \text{ لا} \text{ فو} - \frac{۱}{۲} \text{ لا} \text{ فو} + \dots]$$

$$(۲۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{م۲}{م۱} = \text{ما} = \text{جم} \text{ لا} + \text{جم} \text{ ک لا}$$

$$[\text{ما} = \frac{۱}{م۱} (\text{جم} \text{ ک لا} + \text{جم} \text{ ک لا}) + \dots]$$

$$(۲۳) \quad (عف - م) \text{ ما} = \text{جم} \text{ لا} + \text{جم} \text{ م لا}$$

$$[\text{ما} = \frac{لا}{م۳} (\text{جم} \text{ م لا} - \text{جم} \text{ م لا}) + \dots]$$

$$(۲۴) \quad عف (عف - ۱) \text{ ما} = \text{جم} \text{ لا} [\text{ما} = \frac{۱}{۲} \text{ لا} \text{ جم} \text{ لا} + \dots]$$

$$(۲۵) \quad (عف + م) \text{ ما} = \text{جم} \text{ م لا} + \text{جم} \text{ م لا}$$

$$[\text{ما} = \frac{۱}{م۴} \text{ جم} \text{ م لا} - \frac{۱}{م۴} \text{ لا} \text{ جم} \text{ م لا} + \dots]$$

(۲۶) مساوات $\frac{فرلا}{فرت} + ۲ن + \frac{فرلا}{فرت} + ن = لا = ف جب پ ت سے$
 لا اور $\frac{فرلا}{فرت}$ کی قیمتیں ذیل کی شرائط کے ماتحت دریافت کرو
 ت = ۰ کے لئے $\frac{فرلا}{فرت} = ۰$ اور لا = ۰۔

[لا = $\frac{ف}{سر}$] جب (پ ت - ۲ص) + (پ ت + جب ۲ص) فو = ت
 اور $\frac{فرلا}{فرت} = \frac{ف جب ص}{سر}$ [جم (پ ت - ۲ص) - (ن ت - جم ۲ص) فو = ت]
 جہاں $س = پ + ن$ اور $ص = مس (پ)$

امثلہ ۵

(متجانس مساواتیں)

(۱) $لا^۲ فرلا - لا فرلا - ۲ فرلا = ۰$ [ا = $\frac{ب}{لا} + ج لا$]

(۲) $\frac{فرق}{فرلا} + \frac{۱}{سر} = \frac{فرق}{فرلا}$ کو بطور متجانس خطی مساوات کے حل کرو

[ق = (لوک سر + ب)]

(۳) $لا^۲ فرلا - ۲ فرلا = ۰$ [ا = $\frac{ب}{لا} + ج لا$]

(۴) $لا^۲ فرلا - ۲ فرلا = لا$ [ا = $\frac{ب}{لا} - \frac{لا}{۲}$]

$$\begin{aligned}
 (۶) \quad & \frac{۲ \text{ فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{۳ \text{ فرلا}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما} = \text{لا} \quad [\text{ما} = (\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}} + \frac{۱}{۸} \text{ لا})] \\
 (۷) \quad & \frac{۳ \text{ فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{۳ \text{ فرلا}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما} = \text{لا} \quad [\text{ما} = (\text{لا} + \text{حب لوک لا}) + \frac{۱}{۲} \text{ لا}] \\
 (۸) \quad & \frac{۴ \text{ فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{۳ \text{ فرلا}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما} \quad [\text{ما} = \frac{(\text{لا} + \text{حب لوک لا})}{\frac{۱}{۲} \text{ لا}}] \\
 (۹) \quad & (\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{۲}{\text{فرلا}}) \text{ ف (فرما)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\text{ف (فرما)} = \frac{۱}{\text{فرلا}} + \text{ب فر} + \text{ج فر} + \text{د فر}] \\
 (۱۰) \quad & \text{ثابت کرد که ف (لا فرما) لا کو = لا آف (لا فرما) (۲ + ۳) } \\
 (۱۱) \quad & \text{ثابت کرد که ف (لا فرما) لا کوک لا} \\
 & = \text{لا} \{ \text{فرما} (\text{لوک لا} + \text{ف (فرما)}) \}
 \end{aligned}$$

امثله ۵

همزاد مساواتیں

$$\begin{aligned}
 (۱) \quad & \frac{\text{فرلا}}{\text{قوت}} + \frac{۴ \text{ لا}}{\text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{قوت}} + \frac{۲ \text{ لا}}{\text{ما}} + \frac{۵ \text{ ما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{قوت}} \\
 & [\text{ما} = (\text{جمت} + \text{ب جبت}) \text{ قوت}] \\
 & \text{لا} = \frac{۱}{۲} \{ (\text{لا} + \text{ب جبت}) + (\text{ب جبت}) \} \text{ قوت} \\
 (۲) \quad & \frac{\text{فرلا}}{\text{قوت}} = \frac{۳ \text{ لا}}{\text{ما}} + \frac{\text{فرما}}{\text{قوت}} = \frac{\text{فرما}}{\text{قوت}} + \frac{\text{لا}}{\text{ما}}
 \end{aligned}$$

$$[لا = (ا + ب ت) فو = م = (ا - ب + ج ت) فو]$$

$$(۳) \quad \frac{فرلا}{فرت} + لا + م = م = فو \quad ، \quad \frac{فرما}{فرت} + م - لا = فو$$

$$[لا = (ا + ب ت) فو + \frac{م}{۲۵} فو - \frac{۱}{۳۶} فو]$$

$$م = (ا + ب + ب ت) فو + \frac{۱}{۲۵} فو + \frac{۱}{۳۶} فو$$

$$(۴) \quad \text{حل کرو} \quad \frac{فرلا}{فرت} = لا + م = لا + \frac{فرما}{فرت} = م + لا$$

$$[لا = \frac{ا + ب}{ا - ب} م = \frac{ا - ب}{ا - ب} م]$$

$$(۵) \quad \frac{فرلا}{فرت} + لا - م = م = م = \frac{فرما}{فرت} + لا - م = م = م$$

$$[لا = (ا + ب ت) جم + (ا + ب ت) ج ت = ا]$$

$$م = \frac{۱}{۲} (ا + ب + ج ت) جم + \frac{۱}{۲} (ا - ب)$$

$$[ج ت + ج ت - ا]$$

$$(۶) \quad \text{ثابت کرو کہ مساوات} \quad \frac{فرلا}{فرت} = لا + م = م = \frac{فرما}{فرت} = لا + م$$

$$\text{کے یکجہ لا = ا فو + ا فو اور م = م ا فو + م ا فو}$$

$$\text{جہاں م ا اور م ا جبر یہ مساوات م ا + م ا = م ا - م ا = ۰ کی}$$

اصلیں ہیں

$$\text{اور ل م = ل + م م ، ل م = ل + م م}$$

$$(۷) \quad \text{حل کرو} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ما} = ۰, \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} - \text{ما} = ۰$$

$$\text{لا} = (\text{فر} \frac{\text{ما}}{\text{فرت}} \text{جم} + \frac{\text{ما}}{\text{فرت}}) + (\text{ما} + \frac{\text{ما}}{\text{فرت}}) \text{جب} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \text{جم} (\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{بیما})$$

$$\text{ما} = (\text{فر} \frac{\text{ما}}{\text{فرت}} \text{جب} + \frac{\text{ما}}{\text{فرت}}) + (\text{ما} + \frac{\text{ما}}{\text{فرت}}) \text{جب} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \text{جب} (\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{بیما})$$

$$(۸) \quad \text{حل کرو} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{لا} + \text{ما} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{لا} + \text{ب} \quad \text{ما} = \text{لا} + \text{ب}$$

$$(۹) \quad \text{حل کرو} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ما} = \text{لا} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{ما} = \text{لا} \quad \text{ما} = \text{لا} - \text{ما}$$

$$[\text{لا} + \text{ما} = \text{لا} \text{جم} \quad \text{ما} = \text{لا} - \text{ما} \quad \text{ما} = \text{لا} - \text{ما}]$$

$$\text{لا} = \text{ما} = \text{جب} \text{جم} \quad \text{ما} = \text{لا} - \text{ما} \quad \text{ما} = \text{لا} - \text{ما} \quad \text{ما} = \text{لا} - \text{ما}$$

$$(۱۰) \quad \text{ہمزاد سادوں} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ما} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{ما} \quad \text{ما} = \text{ما} \quad \text{ما} = \text{ما}$$

مستقلات ذیل کے شرائط سے دریافت کرو ت = ۰ کے لئے

$$\text{لا} = ۰ \quad \text{ما} = ۰ \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۰, \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = ۰$$

$$[\text{لا} = \text{لا} \text{جم} \quad \text{ما} = \text{ما} \quad \text{ما} = \text{ما} \quad \text{ما} = \text{ما}]$$

ایک دور کے ذاتی امال کی شرح ل اور فراحت م ہے اس کے درمیان میں گنجائش گ والا کٹھنہ حال ہے۔ اس میں برقی رو کی حرکت کی مسادات

ل فرلا + ل لا = ق اور فرق = لا ہے جہاں لا
برقی رو ہے اور ق کثف کا برقی بار ہے۔ خسروج کے ہتھکڑی
ہونے کی شرط دریافت کرو۔ [ل < ۱/۳ م گ]

حل کرو فرلا = ۱/۳ فرما، فرق = ۱/۳ اور ثابت کر دو کہ ل ایسے
مخروطی کو ظاہر کرتا ہے جو لمبا لا محور کے متساوی ہے۔ (۱۲)

حل کرو فرلا = ۱/۳ فرما، م م م = م م م
اور ثابت کر دو کہ مساوات کو پورا کر نیوالے ٹینوں میں زائدوں کا ایک
قبیل بھی شریک ہے۔ (۱۳)

حل کرو فرلا = ۱/۳ فرما + ۱/۳ فرما = ۱/۳ فرما
[لا = ص + رجم (ن ت + ص) م = م + ف ت] (۱۴)

+ رجم (ن ت + ص) م
حل کرو فرلا = ۱/۳ فرما + ۱/۳ فرما = ۱/۳ فرما + ۱/۳ فرما = ۱/۳ فرما
[لا = رجم (پ ت + ص) + رجم (پ ت + ص) م = م + رجم (پ ت + ص)] (۱۵)

جہاں پ پ = م + ن + ن
حل کرو فرلا = ۱/۳ فرما + ۱/۳ فرما = ۱/۳ فرما + ۱/۳ فرما = ۱/۳ فرما
فرلا = ۱/۳ فرما + ۱/۳ فرما = ۱/۳ فرما (۱۶)

چودہواں باب

قوتی سلسلوں کا تفرق اور مل

۴۵۷

۱۷۴۔ سوال کا بیان۔ اس باب کا اصل مقصد اس امر کے ثبوت کی رہنمائی کرنا ہے کہ مناسب شرائط کے ماتحت تفرق اور مل کے عمل کو ایسے تفاعلوں پر استعمال کر سکتے ہیں جو قوتی سلسلوں سے بیان ہوں مثلاً اس نمونہ کے سلسلوں سے

$$b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (1)$$

جہاں مستقل ہیں پس اگر ص (لا) اس سلسلہ کے حامل جمع کو ظاہر کرے اور یہ فرض کر لیا جائے کہ کسی خاص وقفہ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے سلسلہ مستقر ہے تو ہمیں وہ شرائط دریافت کرنا ہیں جن کے ماتحت یہ بیان کیا جاسکتا ہے کہ ص (لا) متغیر لا کا سلسلہ اور قابل تفرق تفاعل ہے اور علاوہ اس کے

$$ص (لا) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (2)$$

$$\text{اور } ص (لا) فرلا = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (3)$$

اگر (۱) میں رقموں کی تعداد محدود ہوئی تو زیرِ غور سلسلہ کے ثبوت کی ضرورت نہ ہوتی اور جو کتاب میں اب تک بنایا جا چکا ہے (در مجموعہ حصہ ۲۹ اور ۳۰) وہی کافی ہوتا۔ لیکن اس امر کو اچھی طرح خیال میں رکھنا چاہئے کہ لا انتہا سلسلوں کے متعلق اصطلاح "حاصل جمع" کے معنی کچھ مصنوعی سے ہوئے ہیں، اور بغیر تحقیق کے اس امر کو فرض کرنے کا ہمیں کوئی مجاز نہیں ہے کہ اگر ایک سلسلہ اصطلاح کے ایک معنی میں صحیح ہے تو دوسرا سلسلہ بھی صحیح ہوگا۔

سلسلہ (۱) کی پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کے لئے کوئی علا امتیاز کرنے سے سہولت ہوگی اس لئے ہم لکھتے ہیں

$$ص_n (لا) = (لا) + (لا) + (لا) + \dots + (لا) + (لا) \dots (۳)$$

جو لا میں (ن) - (۱) درجے کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ اسے ہم جزوی حاصل جمع، کہیں گے اور اس کی ترتیبی تعبیر تقریبی معنی، کہلائیں گے۔ ایسے منحنیات کی ایک مثال شکل ۱۳۶ میں دی ہوئی ہے۔ نیز اگر فرض کریں کہ

$$ص_n (لا) = ص_n (لا) + ص_n (لا) \dots (۵)$$

تو مقدار ص_n (لا) کو ن رقموں کے بعد کا باقی مانگہ کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ

$$ص_n (لا) + ص_n (لا) + \dots + ص_n (لا) \dots (۶)$$

کا حاصل جمع ہے۔

مفروض کی بنا پر قواعد

$$ص_n (لا) + ص_n (لا) + \dots + ص_n (لا) \dots (۷)$$

کی انتہائی قیمت (لا) کی ایسی قیمت کے لئے جس کے لئے ابتدائی سلسلہ

ستدق ہے) ص (لا) ہے اسی سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تو اتر
 ص (لا) 'ک' (لا) 'ک' (لا) 'ک' (لا) (۸)
 کی انتہائی قیمت صفر ہے۔
 اس امر کو ملحوظ رکھنا چاہئے کہ مذکورہ بالا تمام سائل میں ہمیں "دوہری
 انتہا" سے واسطہ پڑا ہے۔ لہذا ص (لا) کا تسلسل ثابت کر نیچے لے
 چکے (لا) ہیں یہ دکھانا ہے کہ

نہا نہا ص (لا) = نہا نہا ص (لا) (۹)
 نیز ضابطہ (۳) اور (۳) بالترتیب اس طرح لکھے جاسکتے ہیں

فرلا [نہا ص (لا)] = نہا فرلا [ص (لا)] ... (۱۰)

اور [نہا ص (لا)] فرلا = نہا [ص (لا)] فرلا ... (۱۱)
 چونکہ مشتق تفاعل خارج قسمت کی انتہا ہے اور محدود مکمل حاصل جمع کی انتہا
 ہے اس لئے (۱۰) اور (۱۱) کے جملات بھی دوہری انتہا کے تحت میں
 آتے ہیں۔ یہ فرض نہیں کر لینا چاہئے اور نہ ہی یہ ہمیشہ درست ہوتا ہے
 کہ نتیجہ انتہا لینے کی ترتیبوں پر منحصر نہیں ہے۔

۱۷۵۔ لوکارچی سلسلہ کی دریافت۔ ایک یاد دہنالیں

ایسی میں جن کی صورت میں مذکورہ بالا سوالات کا جواب بغیر کسی مشکل کے
 دیا جاسکتا ہے کیونکہ ایسی صورتوں میں ممکن (لا) کی شکل معلوم ہوتی ہے۔
 اور ان سے جو نتائج مرتب ہوتے ہیں وہ بہت اہم ہیں۔
 سلسلہ ہندیہ کے نظریہ میں سادہ تقسیم کے عمل سے ظاہر ہے کہ

$$(۱) \dots \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

بشرطیکہ $t \neq -1$ ۔ ۱۔ فرض کرو کہ لا مثبت ہے تو (۱) سے

$$\text{لوگ}(1+t) = \int \frac{1}{1+t} dt = \int (1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}) dt$$

$$(۲) \dots \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

آخری رقم میں سنگلہ کی قیمت بڑھ جائے گی اگر سنگل کے نسب نامہ اسکی کم سے کم قیمت یعنی ایک درجہ کر دیجائے۔ اسلئے مکمل کم ہے $\int \frac{1}{1+t} dt$ فرست ہو

یعنی $\frac{1}{1+t}$ سے۔

اگر لا ایک سے کم ہو یا ایک کے مساوی بھی ہو تو جیسے ن بڑھتا ہے اسکی انتہا صفر ہوتی ہے۔ پس اگر لا مثبت ہو اور $t \neq -1$ تو

$$\text{لوگ}(1+t) = \int \frac{1}{1+t} dt = \int (1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}) dt$$

جہاں سلسلہ لا تناہی تک پھیلتا ہے۔

بالخصوص لا = ۱ کہنے سے

$$\text{لوگ} 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

اس نتیجہ سے اگرچہ صحیح جواب حاصل ہو سکتا ہے لیکن سلسلہ کے بہت آہستہ مستحق ہونے کی وجہ سے یہ ضابطہ عددی حسابات کے لئے موزوں نہیں ہے۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اعشاریہ کے ن مقام تک صحیح نتیجہ نکالنے کے لئے تقریباً ۱۰ ارقام درکار ہونگے۔ علی طور پر زیادہ مفید ضابطہ (۱۲) ذیل میں درج ہے۔

$$(۱۲) \dots \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{1+t}$$

بشرطیکہ $t \neq 1$ پس اگر لا ایک سے کم مثبت مقدار ہے تو

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t} = 1 + \frac{1}{2^t} + \frac{1}{3^t} + \dots + \frac{1}{n^t} + \dots$$

(۷) فرت

بائیں جانب کے پیکل کی قیمت بڑھ جاتی ہے اگر نسب نما کی بجائے اسکی کم سے کم قیمت جو پیکل کے اندر واقع ہوتی ہے اس میں درج کرو بجائے یعنی نسب نما کی بجائے (۱-لا) لکھ دیا جائے

پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+ن}}$ فرت

(۸) چونکہ مفروض کی رو سے لا ایک سے کم ہے اس لئے جیسے ن بڑھتا ہے اس کی انتہا صفر ہوتی ہے۔

نیز چونکہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t} = \left[1 - \frac{1}{2^t} \right] = 1 - \frac{1}{2^t}$ لوک (۱-لا)۔۔۔۔۔ (۸)

اس لئے لوک (۱-لا) = $1 - \frac{1}{2^t} - \frac{1}{3^t} - \frac{1}{4^t} - \dots - \frac{1}{n^t} - \dots$ لا انتہا تک۔۔۔۔۔ (۹)

۴۶ ضابطوں (۳) اور (۹) کو ذیل کے ایک ضابطہ سے بیان کیا جاسکتا ہے

لوک (۱+لا) = $1 - \frac{1}{2^t} + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{4^t} + \dots + \frac{1}{n^t} - \dots$ (۱۰)

جہاں یہ ضابطہ لا کی ۱ سے ۱ تک کی تمام قیمتوں کے لئے برقرار رہتا ہے بشرطیکہ (۱-لا) کو حدود سے خارج کر دیا جائے اور (۱+) کو شریک کر لیا جائے بائیں جانب کا سلسلہ لوکارنی سلسلہ کہلاتا ہے۔

اگر لا مثبت ہو اور ایک سے کم ہو تو (۳) میں سے (۱۰) کو تفسیق کرنے سے

نو ایسا معلوم ہوتا ہے کہ پہلے ہیل اس سلسلہ کا این مرکٹر (N. Mercator) نے ۱۶۶۸ء میں دیا تھا

$$(11) \dots \dots \left(\dots + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + n \right)^2 = \frac{n+1}{n-1} \text{ لوک}$$

اس نتیجہ میں اگر $\frac{1}{1+q^2} = 0$ درج کریں تو

$$\frac{1+m}{m} \text{ لوک } (1+m) - \text{لوک } m = \text{لوک } \frac{1+m}{m}$$

$$(1^p) \dots \left\{ \dots + \frac{1}{(1+p^2)^p} + \frac{1}{(1+p^2)^p} + \frac{1}{1+p^2} \right\}^p =$$

یہ سلسلہ ۴ = ۱ کے لئے بھی بہت جلد مستحق ہوتا ہے۔ ۴ = ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵،

مثال (۱) :- اگر n لوگ $\frac{n+1}{n}$ لوگ $(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$

(۱۲) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

چونکہ ارقام یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہیں اور ان کی انتہا صفر ہے اسلئے
ان کا حاصل جمع دفعہ ۵ کی رو سے $\frac{1}{5}$ سے بڑا ہو گا۔

۱۰۔ معا کے دریافت کرنیکا سر بی طریقہ ذیل لی متماثلہ مساوات کے ذریعہ ہے

$$\text{لوک} = 10 = 3 \text{ لوک} + 4 \text{ لوک} + \frac{5}{2} \text{ لوک}$$

بائیں جانب کے نو کاظم ضابطہ (۱۲) میں ۴ = ۱۱ اور ۴ = ۴ رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں

نیز لوگ $(\frac{n}{n-1}) = -\text{لوگ}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \dots$ (۱۴)
 جو ظاہر ہے کہ $\frac{1}{n}$ سے بڑا ہے

اس لئے $\frac{1}{n} < \text{لوگ} \frac{1+n}{n} < \frac{1}{1+n}$ (۱۵)
 مثال ۲۔ فرض کرو کہ

۴۶۱

(۱۶) ... $\left\{ \begin{array}{l} \text{ع} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots - \text{لوگ} n \\ \text{و} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots - \text{لوگ}(n+1) \end{array} \right.$
 جہاں n مثبت صحیح عدد ہے۔ تو (۱۵) سے

(۱۷) $\text{ع} - \text{و} = \text{لوگ} \frac{1+n}{n} - \frac{1}{1+n} < 0$

اور $\frac{1}{1+n} = \text{و} - \text{لوگ} \frac{1+n}{n} < 0$ (۱۸)

نیز $\text{ع} - \text{و} = \text{لوگ} \frac{1+n}{n}$ (۱۹)
 جس کی قیمت صفر اور $\frac{1}{n}$ کے درمیان واقع ہے۔

اس لئے مقادیر ع ، و ، ع ، و ، ع ، و (۲۰)
 ایک سلسلہ گھٹنے والا سلسلہ بناتی ہیں

اور و ، و ، و ، و ، و (۲۱)

ایک بڑھنے والے سلسلے کو ظاہر کرتی ہیں۔ نیز چونکہ (۲۰) کا ہر رکن ضابطہ
 (۱۹) کے مطابق (۲۱) کے نامی رکن سے بڑا ہے اس لئے سلسلہ (۲۰) کی
 ایک پختی انتہا ہے (دفعہ ۲) اور سلسلہ (۲۱) کی ایک اوپر کی انتہا ہے۔

علامت لا کے ساتھ بدلتی ہے اس لئے مساوات لا کی - سے + تک (دونوں حدود شریکسائیں) کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح رہتی ہے۔

$$\text{لا} = ۱ رکھنے سے \quad \frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} - \frac{1}{۷} + \frac{1}{۹} - \dots + \frac{1}{۲۵} - \dots \quad (۵)$$

سلسلہ بہت آہستہ مستقر ہوتا ہے اس لئے π کی قیمت دریافت کرنے کے لئے دیگر سلسلے استعمال کئے جاتے ہیں۔ یولر نے ذیل کی مساوات متتابعہ استعمال کی

$$\frac{\pi}{۴} = ۴ \text{ مس}^۱ - \frac{1}{۳} \text{ مس}^۱ + \frac{1}{۵} \text{ مس}^۱ - \dots \quad (۶)$$

$$\text{جس سے } \frac{\pi}{۴} = \left(۱ - \frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} - \frac{1}{۷} + \frac{1}{۹} - \dots \right) + \left(-\frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} - \frac{1}{۷} + \frac{1}{۹} - \dots \right) + \dots \quad (۶)$$

اس سے بیشتر میخسن (Machin) نے ضابطہ

$$\frac{\pi}{۴} = ۴ \text{ مس}^۱ - \frac{1}{۳} \text{ مس}^۱ + \frac{1}{۵} \text{ مس}^۱ - \dots \quad (۸)$$

استعمال کیا تھا۔ (۶) اور (۸) کا ثبوت علم مثلث کی اکثر ابتدائی کتابوں میں دیا جاتا ہے۔

$$\text{سے } \frac{\pi}{۴} = \left(۱ - \frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} - \frac{1}{۷} + \frac{1}{۹} - \dots \right) - \left(\frac{1}{۳} - \frac{1}{۵} + \frac{1}{۷} - \frac{1}{۹} + \dots \right) \quad (۹)$$

مسئلہ کی اہمیت کی وجہ سے یہ مناسب ہو گا کہ میخسن کے ضابطہ سے π کی قیمت دریافت کرنے کا عمل توضیح کے ساتھ دیا جائے۔ مس^۱ $\frac{1}{۵}$ دریافت کرنے کے لئے ہم پہلے ذیل کی جدول بناتے ہیں۔

ن	$\frac{1}{۵}$	$\pm \frac{1}{۵ \times ۷}$
۱	۲۰۰۰۰۰۰۰۰	+
۳	۸۰۰۰۰۰۰۰	-
۵	۳۲۰۰۰۰۰	+
۷	۱۲۸۰۰۰	-
۹	۵۱۲۰	+
۱۱	۲۰۵	-
۱۲	۸	+

آخری کالم کی مثبت رقموں کا حاصل جمع ۵۷۰-۶۴-۱۰۰۰۰۰۰ ہے
 اور منفی رقموں کا مجموعہ ۲۹۷۸۴۹۷۲-۵۰۰۲۶۶۸ ہے۔
 اس لئے سن $\frac{1}{5} = ۱۹۷۳۹۵۵۵۹۸$
 نیز سن $\frac{1}{۲۳۹}$ کی قیمت دریافت کرنے کے لئے ذیل کی جدول ہے

ن	$\frac{1}{۲۳۹}$	$\pm \frac{1}{۲۳۹ \times n}$
۱	۰۰۰۴۱۸۴۱۰۰۴	۰۰۰۴۱۸۴۱۰۰۴ +
۳	۷۳۲	۲۴۲ -

اس لئے سن $\frac{1}{۲۳۹} = ۰۰۰۴۱۸۴۰۷۶۰$

پس $\frac{\pi}{۴} = \text{سن } \frac{1}{5} - \text{سن } \frac{1}{۲۳۹}$

$$= ۷۷۹۵۸۲۲۳۹۲۴ +$$

$$۰۰۰۴۱۸۴۰۷۶۰ -$$

$$= ۷۷۵۳۹۸۱۶۳۲$$

$$\therefore \pi = ۳۵۱۴۱۵۹۲۶۵۲۸$$

ظاہر ہے کہ اعشاریہ کے آخری مقام میں خطا ہو سکتی ہے۔ آخری
 نتیجہ میں خطا کا اندازہ کر نیلے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ سن $\frac{1}{5}$ کی دریافت میں
 پانچ بزرگ خطا کا امکان ہے لیکن ہر جگہ اعشاریہ کے آخری مقام میں خطا
 نصف اکائی سے بڑی نہیں ہو سکتی اور اسی طرح سن $\frac{1}{۲۳۹}$ میں ایسی
 خطا دو جگہ ہو سکتی ہے۔ پس π کی دریافت شدہ قیمت میں اگر تمام خطائیں
 جمع ہوں گی تو یہ اعشاریہ کے آخری مقام میں $۸۴ (۲ \times ۵ \times ۲)$

ظاہر ہے کہ اگر ارقام کی محدود تعداد کے بعد ہر رقم اور اسکی پہلی رقم کی نسبت کی مطلق قیمت کسی مقدار کے کم سے کم ہے جو خود ایک سے کم ہے تو سلسلہ لازماً مستحق ہوگا۔ کیونکہ ایسی صورت میں سلسلہ کی متواتر قیمتیں مشترک نسبت کے واسطے بندہ سلسلہ کی رکنوں پر یا بہ نسبت زیادہ تیزی سے گھٹتی ہیں۔ بالخصوص سلسلہ (۱) لازماً مستحق ہوگا اگر

$$\text{نہا} \mid \frac{1+n}{n} \mid \text{لا} \mid > 1 \dots \dots \dots (۳)$$

کیونکہ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہے اور زیر غور انتہا کے ہے تو ن کو کافی بڑا لینے سے ہم اطمینان کر سکتے ہیں کہ ن کی اس اور اس سے بڑی قیمتوں کے لئے کسر $\frac{1+n}{n} \mid \text{لا} \mid$ کسی مقررہ مقدار کے (جوگ اور ایک کے درمیان ہے) کم ہے۔
اگر شرط (۲) پوری ہوتی ہے تو سلسلے

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots \dots \dots (۳)$$

اور $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots \dots \dots + \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n}$ (۴)
جنکی ارقام سلسلہ (۱) کو بالترتیب تفرق اور تکمیل کرنے سے حاصل ہوئی ہیں لازماً مستحق ہونگے۔ کیونکہ (۳) کی صورت میں

$$\text{نہا} \mid \frac{1+n}{n} \mid \text{لا} \mid = \text{نہا} \mid \frac{1}{n} \mid + \text{نہا} \mid \frac{1}{n^2} \mid + \dots \dots \dots (۵)$$

✽ جانچ کی یہ شکل ڈی لا مبرٹ کے نام سے مشہور ہے

سلسلہ (۴) کے مستحق ہونے کا ثبوت اس سے بھی زیادہ ظاہر ہے۔
 نیز نسبتی جانچ سے قلع نظر کر کے صرف فرض کرو کہ سلسلہ (۱) ۴۶۵
 لا کی مخصوص قیمت عہ کے لئے مستحق ہے۔ اب چونکہ ارقام کو لا
 اتھا گھٹنا چاہئے اس لئے ضروری ہے کہ

$$\text{نہا} \mid \text{ا ل ن عہا} \mid = \dots \dots \dots (۶)$$

اس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جن کے
 لئے لا ا > ا عہا لازم مستحق ہوگا کیونکہ سلسلہ ذیل کی شکل میں
 لکھا جاسکتا ہے

$$\text{ا} + \text{ا عہا} \left(\frac{\text{لا}}{\text{عہا}} \right) + \text{ا عہا} \left(\frac{\text{لا}}{\text{عہا}} \right)^2 + \dots + \text{ا ل ن عہا} \left(\frac{\text{لا}}{\text{عہا}} \right)^n + \dots (۷)$$

اب ا ل ن عہا کی بڑی سی بڑی قیمت کو م سے ظاہر کرنے سے
 ہم دیکھتے ہیں کہ (۷) کی مختلف رقمیں ذیل کے مستحق ہند سی سلسلہ
 کی استناظر رقموں سے مطلق قیمت میں کم ہیں

$$\text{م} (۱ + \text{ت} + \text{ت}^2 + \text{ت}^3 + \dots + \text{ت}^n + \dots) \dots \dots (۸)$$

$$\text{جہاں } \text{ت} = \frac{\text{لا}}{\text{عہا}}$$

اس لئے سلسلہ (۷) بھی لازم مستحق ہوگا۔

پس اگر سلسلہ (۱) لا کی کسی ایک قیمت (عہ) کے لئے جو صفر
 نہیں ہے مستحق ہو تو یہ سلسلہ احاطہ [- عہا، عہا] میں مستحق ہوگا
 اور احاطہ [- عہا، عہا] میں لازم مستحق ہوگا۔

نیز (۶) سے ظاہر ہے کہ سلسلے (۳) اور (۴) بھی احاطہ [- عہا، عہا]

میں لازم مستحق ہونگے۔ کیونکہ اگر مطلق قیمت میں عہ سے کم کوئی مقدار ہو تو

لا = ۱ کے لئے تسلسل ہے۔
۱۷۸۔ قوتی سلسلوں کا تسلسل :- اب فرض کرو کہ سلسلہ

ص (لا) = $ل_۱ + ل_۲ + ل_۳ + ل_۴ + ... + ل_n + ل_{n+1} + ...$ (۱)
احاطہ [۔ عکس] میں لازماً مستحق ہے۔ اگر لا اور لا اس احاطہ کے
کوئی دو نقاط ہوں تو: فتح ۵ (آ) اور (۴) سے

$$\begin{aligned} \text{ص (لا)} - \text{ص (لا)} &= (لا - لا) = ل_۱ + ل_۲ + ل_۳ + ل_۴ + ... + ل_n + ل_{n+1} + ... \\ &+ \frac{لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + لا_۴ + ... + لا_n + لا_{n+1} + ...}{۳} \\ &+ \frac{لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + لا_۴ + ... + لا_n + لا_{n+1} + ...}{۳} \\ &+ \frac{لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + لا_۴ + ... + لا_n + لا_{n+1} + ...}{۳} \end{aligned}$$

اگر لا اور لا کی علامت ایک ہی ہو تو کسر

کی قیمت لا^{۱-ن} اور لا^{۱-ن} کے درمیان واقع ہوگی۔ اس لئے خطوط
وحدانی } کے اندر کی مختلف رقمیں مطلق قیمت میں ذیل کے دو سلسلوں
کی متناظر رقموں کے درمیان واقع ہوتی۔

$$\begin{aligned} (۳) \quad ل_۱ + ل_۲ + ل_۳ + ل_۴ + ... + ل_n + ل_{n+1} + ... + لا^{۱-ن} \\ \text{اور} \quad ل_۱ + ل_۲ + ل_۳ + ل_۴ + ... + ل_n + ل_{n+1} + ... + لا^{۱-ن} \end{aligned}$$

یہ ثابت کر دیا گیا ہے کہ مذکورہ بالا مفروضہ پر یہ دونوں سلسلے
لازماً مستحق ہیں۔ اس لئے (۲) میں } کے درمیان کا جملہ محدود ہے پس

$$\text{نہا} = \{ \text{ص (لا)} - \text{ص (لا)} \} = ۰ \quad (۵)$$

اور یہ نتیجہ احاطہ [ع، عا] کے تمام نقاط کے لئے صحیح ہے۔
 ظاہر ہے کہ یہی نتیجہ حاصل ہو گا اگر تمام سران منفی ہوں۔
 اب فرض کرو کہ لا منفی ہے اور سران مثبت ہیں اس صورت میں
 ص (لا) میں ایک ایک رقم چھوڑ کر جو دو ذیل کے سلسلے بنتے ہیں
 ان پر مذکورہ بالا دلائل عائد ہو سکتے ہیں

$$1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n + \dots + 1^{\infty} \dots (۳)$$

$$1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n + \dots + 1^{\infty} \dots (۴)$$

کیونکہ (۲) کی تمام رقمیں مثبت ہیں اور (۳) کی منفی۔ اب ان کا متعلق تفاعل
 ان سلسلوں کو بالترتیب رقم۔ رقم تفریق کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے
 پس ان کو جمع کرنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہو گا کیونکہ برود سلسلے لازماً
 مستحق ہیں۔

آخر انعام اگر سران تمام ایک ہی علامت کے نہیں ہیں تو ص (لا)
 کو دو ایسے سلسلوں کے حاصل جمع میں تخیل کیا جاسکتا ہے کہ ان میں
 سے ایک کے تمام سر مثبت ہوں اور دوسرے کے منفی۔ اب مذکورہ بالا
 دلائل ان میں سے ہر ایک پر عائد ہو سکتے ہیں اور اس لئے ان کے
 مجموعے پر بھی عائد ہو سکتے ہیں۔

اوپر کے بیان میں اس امر کا مشاہدہ کرنا ہو گا کہ زیر غور سلسلہ کا لازماً
 مستحق ہونا اوپر کے استدلال کے لئے بحد ضروری ہے۔
 مثال :- یہ معلوم ہے کہ $1 + 2 + 3 + \dots + n$ کے لئے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1) \dots (۵)$$

دونوں جانبوں کو تفریق کرتے سے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} (n+1) \dots (۶)$$

نیز دوبارہ تفرق کرنے سے

$$(c). \left\{ \frac{r-1}{r} (1-C) C + \dots + \frac{1}{r} (r x^2 + r x r + r x 1) \right\} \frac{1}{r} = \frac{1}{r(n-1)}$$

۱۸۰۔ قوتی سلسلوں کا تکمیل :- دفعات ۱۷۷-۱۷۹ آغا قزم کے موافق فرض کر دے کہ

$$E(n) = 1 + \frac{1}{2}E(2) + \frac{1}{3}E(3) + \dots + \frac{1}{n}E(n)$$

اس مضمون کی بنیاد پر کہ ص (لا) احاطہ ہے۔ ص، ع میں لازم آتا ہے سلسلہ (ا) بھی اسی احاطہ میں لازم آتا ہے۔ یس دفعہ ۹، اکی

$$\text{ع } (لا) = (لا) + (لا) + \dots + (لا) + \dots + (لا) = \text{ص } (لا) \dots (لا) \quad (2)$$

اس لئے $\{v, (v) \text{ فر } \} = \{e, (e) \} = e \dots (3)$

خالد (۱) اگر الا (۲) تو مسئلہ شتائی (دفعہ ۱۸۲) سے

$$(r) \dots + \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{r-1}$$

پس حدود سفر اور لاکے درمیان رقم بہ رقم بچل کرنے سے

جواب (د) $\dots + \frac{n}{6} \times \frac{6 \times 3 \times 1}{3 \times 2 \times 1} + \frac{n}{5} \times \frac{3 \times 1}{2 \times 1} + \frac{n}{4} \times \frac{1}{1} + n = 1$

یہ سلسلہ نیوٹن کا دریافت کیا ہوا ہے۔

اس میں اگر لایہ آپ رکھیں تو

$$(4) \dots \left[\dots + \frac{r \times 1}{r \times r \times r \times r} + \frac{1}{r \times r \times r} + \frac{1}{r} \right] 4 = \pi$$

جس سے π کی قیمت پر آسانی دریافت ہو سکتی ہے۔

مثال (۲)۔ اگر $|a| > |a+1|$ تو لوگ $(a+1) = (a) - (a) + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \dots (۴)$

۴۶۹

اسکو حدود صفر اور (a) کے درمیان رقم بہ رقم تحمل کرنے سے

$$(a+1) \text{ لوگ } (a+1) - (a) = (a) - \frac{a^2}{2 \times 2} + \frac{a^3}{3 \times 3} - \frac{a^4}{4 \times 4} \dots (۸)$$

دفعہ ۸، کے ماضی میں یہ دکھایا گیا ہے کہ بائیں جانب کا تفاعل $(a) = \text{آئک}$ سلسل ہے۔ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$528929 \dots = 1 - 2 \text{ لوگ } 2 = \dots = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 2} - \frac{1}{2 \times 1}$$

۱۸۱۔ تفرقی مساوات کا حل سلسلوں کے ذریعہ۔

اگر کوئی تفرقی مساوات دی ہوئی ہو جس کے سر متبوع متغیر (a) کے منطق صحیح تفاعل ہوں تو صعودی قوتی سلسلہ

$$F_n = (a) + (a) + (a) + \dots + (a) + \dots (۱)$$

کی شکل میں اکثر حل دریافت ہو سکتا ہے۔ اب اگر نحوڑی دیر کے لئے فرض کر لیا جائے کہ (a) کے کسی خاص احاطہ میں سلسلہ لازماً مستحق ہے تو دفعہ ۹، کے ضابطہ سے یہ (a) کے لحاظ سے ایک، دو، یا زیادہ دفعہ تفرق کیا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات میں سلسلہ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ مساوات پوری ہو سکتی ہے بشرطیکہ سروں $(a), (a), (a) \dots$ میں چند رشتے ہوں۔

اس طریقہ پر ایک یا زیادہ اختیاری مستقل والا سلسلہ حاصل ہو جائے اور اگر یہ ثابت ہو جائے کہ سلسلہ لازماً مستحق ہے تو یہ اس تفرقی مساوات کا ایک حل ہوگا۔ بلاشبہ یہ الگ سوال ہے کہ آیا یہ حل مکمل حل ہے یا مکمل حل بنانے کے لئے اس میں کچھ اور اضافہ ہونا چاہئے

ما = اجم لا + جب لا (۶)
 پس اگر ا اور ل کی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ل اور جب کی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں کہ جملے (۵) اور (۶) متساوی مساوی ہوں۔
 مثلاً ل = ۱ اور ا = ۱۔ درج کرو

تو ۱ - $\frac{لا^۲}{۲}$ + $\frac{لا^۲}{۳}$ - $\frac{لا^۲}{۴}$ + = اجم لا + جب لا
 لا کی علامت بدلتے سے

۱ - $\frac{لا^۲}{۲}$ + $\frac{لا^۲}{۳}$ - $\frac{لا^۲}{۴}$ + = اجم لا - جب لا
 پس ضروری ہے کہ جب = ۰، اب لا = ۰۔ رکھنے سے ل = ۱ دریافت ہوتا ہے۔

اس سے ذیل کا ضابطہ حاصل ہوتا ہے

جم لا = ۱ - $\frac{لا^۲}{۲}$ + $\frac{لا^۲}{۳}$ - $\frac{لا^۲}{۴}$ + (۷)

اسی طرح اگر ل = ۰ اور ا = ۱ رکھیں تو حاصل ہوتا ہے

ل = ۰ اور جب = ۱

اور اسلئے جب لا = لا - $\frac{لا^۲}{۳}$ + $\frac{لا^۲}{۵}$ - (۸)

کئی وجوہات سے تفرقی مساوات کے حل کرنے کا طریقہ بالا عملی طور پر کارآمد نہیں ہے، اور یہ بھی ممکن ہے کہ اس سے نامکمل حل حاصل ہو۔

مثلاً دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کی صورت میں ممکن ہے کہ صرف ایک ہی سلسلہ حاصل ہو اور اسلئے ایک ہی اختیاری مستقل ہو۔ اس مضمون کے طبیعی اطلاقات میں اکثر ایسا ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں حل کم از کم علامات کی رقوم میں دفعہ ۱۶۶ (۳) کے طریقے سے مکمل

کیا جاسکتا ہے
۱۸۲۔ تفرقی مساوات کی مدد سے پھیلاؤ:-

بعض اوقات گذشتہ دفعہ کا طریقہ ایک دے ہوئے تفاعل کو
توقی سلسلہ میں پھیلائے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے بشرطیکہ ایسی
مساوات مرتب ہو سکے جس کے منطق صحیح تفاعل ہوں اور جو اصلی
تفاعل کے اندراج سے پوری ہو جائے۔

مثلاً فرض کرو کہ $M = (1 + \lambda)^2 \dots \dots \dots (1)$
جہاں M مثبت منفی صحیح عدد یا کسر ہے۔ دونوں جانب کا لوکار نم
لیکر تفرق کرنے سے

$$\frac{M}{\lambda + 1} = \frac{فرما}{فرلا}$$

یعنی $(1 + \lambda) \frac{فرما}{فرلا} - M = \dots \dots \dots (2)$
اب فرض کرو کہ

$$M = (1 + \lambda) + (1 + \lambda)^2 + \dots + (1 + \lambda)^n \dots \dots \dots (3)$$

اس کو مساوات میں درج کرنے سے

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda)^2 + \dots + (1 + \lambda)^n + \dots + (1 + \lambda)^{n-1} \dots$$

$$- M = (1 + \lambda) + \dots + (1 + \lambda)^n + \dots + (1 + \lambda)^{n-1} \dots =$$

طریقہ ابتدا میں نمونہ نے استعمال کیا تھا نیز جم (۱) (۱) کے سلسلے
بھی اسی لئے حاصل کئے تھے اگرچہ سلسلے حاصل کرنے کا طریقہ مختلف تھا

$$\text{یا } (1, 3, 5, \dots) + (2, 4, 6, \dots) + (3, 5, 7, \dots) + \dots + (n, n+1, n+2, \dots)$$

$$+ \{n(n-1) - (n-1)(n-2) - (n-2)(n-3) - \dots - 1\} = \dots + (n) \quad (۴)$$

یہ متماثل پوری ہوتی ہے بشرطیکہ

$$1 = \frac{n}{1}$$

$$1 = \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2} \times 1$$

$$1 = \frac{n-2}{3} = \frac{n-2}{3} \times 1 \times 2$$

اور عام طور پر

$$(۵) \quad 1 = \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\} \times \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{n}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{n} \times \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{n} \dots (۶)$$

جو مساوات (۲) کا حل ہے۔ یہ آسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ سلسلہ

الا کے لئے مستحق ہے۔

اب اگر تفرقی مساوات (۲) کے مرتب کرنے کے طریقے کو الٹیں تو ۴۰۲
ظاہر ہے کہ اس کا مکمل حل ہے

$$\text{ما} = \{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\} \quad (۷)$$

$$یا (۱-۱) + (۱-۲) + (۲-۳) + (۳-۴) + \dots$$

$$+ \{ (۱-۲) - (۲-۳) + (۳-۴) - \dots \} \quad (۱۳)$$

یہ مساوات متناظر پوری ہوگی بشرطیکہ

$$(۱۴) \dots \left\{ \begin{array}{ll} ۱ = ۱ & ۱ = ۱ \\ \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} & \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴} \\ \frac{۴}{۵} = \frac{۴}{۵} & \frac{۵}{۶} = \frac{۵}{۶} \\ \dots & \dots \end{array} \right.$$

اس سے یہ عمل حاصل ہوتا ہے

$$= ۱ + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۴} + \frac{۴}{۵} + \dots$$

$$+ (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۴} + \frac{۴}{۵} + \dots) \quad (۱۵)$$

اب اگر ہم غلطی مساوات (۱۴) کے دائیں طرف کے عمل کو اسیں تو ظاہر ہے کہ اس کا عام عمل ہوگا

$$یا (۱۶) \dots \dots \dots = ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$یا (۱۷) \dots \dots \dots = ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

سوال کی نوعیت سے اس امر کا پتہ چلتا ہے کہ (۱۵) کو منتخب (۱۷) میں شامل ہونا چاہئے۔ اگر (۱۷) اور (۱۸) میں لا = ۰

رکھیں تو حاصل ہوتا ہے $1 = 1$ اب ماکے لئے جو دو جملے ہیں ان کے
منماً مساوی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ

$$(18) \quad \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5 \times 3} + \frac{2}{7} + \dots \dots \dots$$

$$(19) \quad 1 = \frac{1}{1-1} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5 \times 3} + \frac{3}{7 \times 5} + \dots \dots \dots$$

دونوں سلسلے مستقناً جبکہ $1 = 1$ نتیجہ (۱۹) صرف (۱۸) کا منماً
پھیلاؤ ہے اب اگر $1 =$ جب طہا رکھیں تو پہلا سلسلہ ذیل کی شکل میں لکھا
جاسکتا ہے

$$(20) \quad \text{طہا} = \text{جب طہا جم طہا} + \frac{2}{3} \text{ جب طہا} + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} \text{ جب طہا} + \dots$$

نیز اگر اس میں مس ضا = سی درج کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$(21) \quad \text{مس} - \text{ای} = \frac{\text{سی}}{1+\text{سی}} + \left\{ \frac{\text{سی}}{3} + \frac{2}{5 \times 3} \times \frac{\text{سی}}{1+\text{سی}} + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} \times \frac{\text{سی}}{1+\text{سی}} + \dots \right\}$$

یہ سلسلہ π کی قیمت دریافت کر کے کے لئے کئی عمدہ طریقوں کی بنا
مثلاً یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{\pi}{4} = 5 - \text{سن} \frac{1}{2} + \text{سن} \frac{1}{4} - \text{سن} \frac{3}{4} + \dots$$

$$\text{جس سے } 11 = \frac{2}{11} + \left\{ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{11} \right) \frac{2}{5 \times 3} + \left(\frac{2}{11} \right) \frac{2}{7} + \dots \right\}$$

$$(22) \quad \dots + \left\{ \dots + \left(\frac{1 \times 2}{1 \dots} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \left(\frac{1 \times 2}{1 \dots} \right) \frac{2}{7} + 1 \right\} \frac{3 \times 3 \times 2}{1 \dots} +$$

یہ سلسلہ بہت جلد مستند ہوتا ہے۔ اس کے علاوہ نسب نامہ ۱۰ کی قوتیں
ہونے کی وجہ سے عددی حسابات کے لئے بہت موزوں ہے۔

$$۰.۱۲۴۲۲۵۲۰۰ = \dots - \frac{1}{۸۰ \times ۳} + \frac{1}{۸۰ \times ۲} - \frac{1}{۸۰} = ج$$

اسکی مدد سے لوگ ۱۰ دریافت کرو۔ (Adams)

$$(۴) \text{ ثابت کرو کہ } ۲ = ج + ۵ ق + ۳ ص$$

$$\text{لوگ } ۳ = ج + ۸ ق + ۵ ص$$

$$\text{لوگ } ۵ = ج + ۱۲ ق + ۴ ص$$

$$\text{لوگ } ۱۰ = ج + ۱۴ ق + ۱ ص$$

$$۰.۶۴۵۳۸۵۲۱۱ = (\dots + \frac{1}{۳۱ \times ۵} + \frac{1}{۳۱ \times ۳} + \frac{1}{۳۱}) ۲ = ج$$

$$۰.۴۰۸۲۱۹۹۴۵ = (\dots + \frac{1}{۵۴۹ \times ۵} + \frac{1}{۵۴۹ \times ۳} + \frac{1}{۵۴۹}) ۲ = ق$$

$$۰.۱۲۴۲۲۵۲۰۰ = (\dots + \frac{1}{۱۶۱ \times ۵} + \frac{1}{۱۶۱ \times ۳} + \frac{1}{۱۶۱}) ۲ = ص$$

اس ضابطہ کی مدد سے لوگ ۱۰ قیمت دریافت کرو۔ (Glaisher)

(۵) اگر $۱ > ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} + ۱ = لا$$

(۶) ثابت کرو کہ

$$نہا = (۱ + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} + \dots + \frac{1}{۱۰۰} - \frac{1}{۲} \text{ لوگ } ۲) = \frac{1}{۲} \text{ جہا} + \text{لوگ } ۲$$

(۷) اگر پ ق دو مثبت مقادیر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$نہا = (ن پ + ۱ + \frac{1}{ن پ} + \dots + \frac{1}{ن ق}) = \text{لوگ } \frac{ق}{پ}$$

(۸) ثابت کرو کہ اگر لا مثبت ہو اور بڑا ہو تو تقریباً لوگ جہا لا = لا - لوگ ۲ + ۲۰

(۹) نیز ثابت کرو کہ تقریباً لوگ مسنری لا = ۲ - ۲ فو

امثلہ ۹۰
(سلسلوں کا تقریبی اور مکمل)

(۱) مثلاً $\frac{1}{1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

کو جبکہ لا > ۱ اگر تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ اگر م شبہ صحیح عدد ہے تو

(۱- لا) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{(1+2)(1+3)(1+4)(1+5)\dots}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots}$

(۲) اگر لا > ۱ تو ثابت کرو کہ

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ لا مسن لا - ۱/۲ لوگ (۱+ لا)

نیز دکھاؤ کہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

(۳) ثابت کرو کہ اگر لا > ۱ تو

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

(۴) ثابت کرو کہ سلسلہ

$\frac{1}{11 \times 9 \times 7} + \frac{1}{9 \times 7 \times 5} + \frac{1}{7 \times 5 \times 3} + \dots$

کا حاصل جمع ۰.۵۰۷۱۳۴۹..... ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ $\frac{1}{4 \times 6 \times 8} + \frac{1}{6 \times 8 \times 10} + \frac{1}{8 \times 10 \times 12} + \dots = \frac{1}{4 \times 6 \times 8} + \frac{1}{6 \times 8 \times 10} + \frac{1}{8 \times 10 \times 12} + \dots$

$$\text{اور } \frac{1}{3 \times 2 \times 1} - \frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{7 \times 6 \times 5} - \dots = 153224 \dots$$

(۶) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \text{ فرلا}$$

(۷) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \text{ فرلا}$$

$$\text{اور } \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \text{ فرلا}$$

(۸) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \text{ فرلا}$$

(۹) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \text{ فرلا}$$

(۱۰) ثابت کرو کہ

$$\left(1 - \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} - \frac{1}{7 \times 9} + \dots \right)^2 = \frac{\pi^2}{96}$$

امثلہ ۶

(سلسلہ بیحد سے تفرقی مساوات کا حل)

(۱) جب لا کے سلسلے کو ماکر دائرہ کی قوس کے تقریبی طول دریافت کریں گے
نئے ہائیگن (Huyghens) کا نمائندہ ثابت کرو۔ ضابطہ یہ ہے
نصف قوس کے وتر کے آٹھ گنے میں سے پوری قوس کا وتر نکھٹاؤ

ماصل تفریق کو تین سے تقسیم کرو۔

نیز ثابت کرو کہ ۵م کی قوس میں متناسب خطا ۲۰۰۰۰ میں ایک سے کم ہے

$$(۲) \text{ مساوات } لا \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} + ۵م = ۰ \text{ کا حاصل حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو}$$

$$ما = (۱ - \frac{۵م}{۱} + \frac{۵م^۲}{۲ \times ۱} - \frac{۵م^۳}{۳ \times ۲ \times ۱} + \dots)$$

$$(۳) \text{ مساوات } \frac{فرما}{فرلا} + \frac{۱}{۵م} + \frac{فرما}{۵م} = ۰ \text{ کا حاصل حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو}$$

$$فرما = (۱ - \frac{۵م}{۲} + \frac{۵م^۲}{۲ \times ۲} - \dots)$$

$$(۴) \text{ مساوات } (۱ - لا) \frac{فرما}{فرلا} - لا \frac{فرما}{فرلا} = ۰ \text{ کامل سلسلہ میں دریافت}$$

کرو اور اس سے جب لا کا پھیلاؤ حاصل کرو [دیکھو دفعہ ۱۸ (۵)]

$$(۵) \text{ ثابت کرو کہ } ما = \text{جب لا تفریق مساوات } (۱ + لا) \frac{فرما}{فرلا} + لا \frac{فرما}{فرلا} = ۰$$

کو پورا کرتا ہے۔

پس دکھاؤ کہ لا > ۱ کے لئے

$$\text{لوگ } \{ (۱ + لا) + \sqrt{(۱ + لا)^۲ - ۱} \} = لا - \frac{۱}{۲} + \frac{لا}{۳} - \frac{۱}{۵} + \frac{لا}{۳ \times ۲} - \dots$$

$$(۶) \text{ مساوات } لا \frac{فرما}{فرلا} + (۵م - لا) \frac{فرما}{فرلا} - ما = ۰ \text{ کا ایک حل}$$

ما = ج عر کی شکل میں دریافت کرو: باا

$$+ \frac{لا^2}{(۲+ع)(۱+ع)ع} + \frac{لا^2}{(۱+ع)ع} + \frac{لا}{ع} + ۱ = ۶$$

نیز ثابت کرو کہ مساوات لا $\frac{فرما}{فرلا}$ + $(ع+لا)$ $\frac{فرما}{فرلا}$ - $ما = ۰$ ۔
رشتہ $ما = ج$ قولاً سے پوری ہوتی ہے۔

$$(۴) \text{ مساوات فرمے } \left\{ (۱-ع) \frac{فرما}{فرع} \right\} + ن(۱+ن) = ۰$$

مل ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$= ۶ - \left[(۱-ن) \frac{ن(۱+ن)}{۲} + \frac{ن(۲-ن)(۱+ن)(۳+ن)}{۳} - ... \right]$$

$$+ جب [ع - \frac{ن(۱+ن)(۲-ن)}{۳} + \frac{ن(۳-ن)(۱-ن)(۲+ن)(۳+ن)}{۴} - ...]$$

[.....]

$$(۵) \text{ مساوات (۱-لا) } \left(\frac{فرما}{فرلا} + ن(۱-ن) \right) = ۰$$

کایک مل سلسلہ میں دریافت کرو اور یکس مل کے لئے علامتی جملہ لکھو۔

$$(۹) \text{ مساوات لا (۱-لا) } \frac{فرما}{فرلا} + \left\{ جب - (ع+ع+ع+۱) لا \right\} \frac{فرما}{فرلا}$$

- $ع+ع+ع+۱ = ۰$ کایک مل ذیل کی شکل میں دریافت کرو

$$= ۱ + \frac{ع+ع+ع}{ع+۱} + \frac{ع(ع+ع+ع+۱)}{ع(ع+۱)}$$

$$+ \frac{ع(۱+ع)(۲+ع)(ع+ع+ع+۱)}{ع(۱+ع)(۲+ع)(ع+ع+ع+۱)} + \frac{ع(۲+ع)(ع+ع+ع+۱)}{ع(۲+ع)(ع+ع+ع+۱)}$$

$$(۱۰) \text{ مساوات } \frac{فرما}{فرلا} + \frac{۱}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} + \left(\frac{ن}{فرلا} - ک \right) = ۰$$

کایک مل

ذیل کی شکل کا ہوگا

$$فما = ا ر س^2 \left[\dots - \frac{ک^2 ر^2}{(۲+ن۲)۲} + \frac{ک^2 ر^2}{(۲+ن۲)۳ \times ۲} - \dots \right]$$

$$(۱۱) \quad \text{مساوات} \cdot \frac{فرما}{فر ر} + \frac{(۱+ن)۲}{ر} \cdot \frac{فری}{فر ر} + گ^2 سر = \text{کا مکمل حل}$$

ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$س = ا^2 \left[\dots - \frac{ک^2 ر^2}{(۳+ن۲)۲} + \frac{ک^2 ر^2}{(۳+ن۲)۳ \times ۲} - \dots \right]$$

$$+ جب ر^{۱-۲} \left[\dots - \frac{ک^2 ر^2}{(ن۲-۱)۲} + \frac{ک^2 ر^2}{(ن۲-۱)۳ \times ۲} - \dots \right]$$

(۱۲) اگر ما = جب (م جب ا) تو ثابت کرو کہ

$$(۱-لا) \cdot \frac{فرما}{فر لا} - لا \cdot \frac{فرما}{فر لا} + م^2 ما = .$$

$$\text{پس دکھاؤ کہ جب م طہ} = ۱ - \frac{م^2}{۳} - \frac{۱-م^2}{۳} \cdot \frac{جب طہ}{۵} + \frac{(۱-م^2)(۱-م^2)}{۵} \cdot \frac{جب طہ}{۵} - \dots$$

$$\text{اور جم م طہ} = ۱ - \frac{م^2}{۳} \cdot \frac{جب طہ}{۳} + \frac{م^2(۲-م^2)}{۳} \cdot \frac{جب طہ}{۳} - \dots$$

(۱۳) اگر لوک ما = ر جب ا تو ثابت کرو کہ

$$(۱-لا) \cdot \frac{فرما}{فر لا} = لا \cdot \frac{فرما}{فر لا} + و^2 ما$$

نیز ما کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$$[ما = ۱ + و^2 لا + \frac{و^2 لا^2}{۲} + \frac{و^2 (۱+و^2) لا^2}{۳} + \frac{و^2 (۲+و^2) لا^2}{۴} + \dots]$$

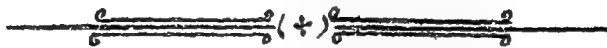
(۱۳) اگر $\frac{لوک (n+1)}{(n+1)}$ قیثابت کرکے $\frac{فرما (n+1)}{فرما}$ $= 6 + \frac{فرما}{(n+1)}$ $= 6$

پس مائل کرو کہ $\text{ما} = \text{لا} - (\frac{1}{p} + 1) \text{لا} + (\frac{1}{p} + 1 + 1) \text{لا} - (\frac{1}{p} + 1) \text{لا} + \dots$

اور دکھاؤ کہ سلسلہ الاطاف کے لئے مستحق ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ تو

$$\dots \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 \right) \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{مسألة})$$



پندرہواں باب

ٹیلر کا مسئلہ

۳۸۰

۱۸۳۔ پھیلاؤ کی شکل - فرض کر دو کہ $f(x)$ متغیر x کا

ایسا تقاطع ہے جو فاصلہ حدود \pm ع میں x کی تمام قیمتوں کے لئے
مستحق قوتی سلسلہ میں پھیلا یا جا سکتا ہے۔ دفعہ ۹، ۱۰ میں ثابت
کیا جا چکا ہے کہ مشتق تقاطع $f'(x)$ اس مشابہ سلسلے سے بیان
ہوگا جو ابتدائی سلسلہ کو رقم بہ رقم تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے
اور \pm ع کے درمیان لائی تمام قیمتوں کے لئے یہ نتیجہ صحیح ہوگا۔

مذکورہ بالا مسئلہ کے دوبارہ اطلاق سے x کی انہیں حدود
میں $f(x)$ سلسلہ $f'(x)$ کو رقم بہ رقم تفریق کرنے سے حاصل
ہوگا۔ اور اسی طرح اس سے اعلیٰ تفریق سرور کے لئے۔

پس اگر $f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ (۱)

تو $f'(x) = f'_0(x) + f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$
 $f''(x) = f''_0(x) + f''_1(x) + f''_2(x) + \dots + f''_n(x) + \dots$ (۲)
 $f^{(n)}(x) = f^{(n)}_0(x) + f^{(n)}_1(x) + f^{(n)}_2(x) + \dots + f^{(n)}_n(x) + \dots$

دفعہ ۶۴ میں ثابت کیا گیا تھا کہ

$$ف(ن) (لا) = جم (لا + \frac{\pi}{2} ن)$$

اس لئے $ف(۰) = ۱$ ، $ف(۱) = جم \frac{\pi}{2}$ (۹)

پس $ف(۱)$ صفر ہوگا جبکہ $ن$ طاق ہے اور ± ۱ کے مساوی ہوگا جبکہ $ن$ جفت ہے اس میں مثبت یا منفی کی علامت $\frac{\pi}{2}$ کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہوگی۔

میکلورن کے ضابطہ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$جم لا = ۱ - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۴}{۴} - \dots + \frac{لا^{۲۲}}{۲۲} (۱ -) + \dots (۱۰)$$

(۴) فرض کرو کہ $ف(لا) = جب لا$

اس لئے $ف(۱) (لا) = جب (لا + \frac{\pi}{2} ن)$ (۱۱)

$$اور ف(۰) = ۱، ف(۱) = جب \frac{\pi}{2} = جب \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{۱ - \pi}{۲} \right\}$$

(۱۲)

پس $ف(۱)$ صفر ہوگا جبکہ $ن$ جفت ہے اور ± ۱ کے مساوی ہوگا جبکہ $ن$ طاق ہے نیز مثبت یا منفی کی علامت $\frac{\pi}{2}$ کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہوگی۔ اس لئے میکلورن کے ضابطے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$جب لا = لا - \frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} - \dots + \frac{لا^{۱۰+۲۲}}{۱۰+۲۲} (۱ -) + \dots (۱۳)$$

نتیجہ (۱۰) اور (۱۳) دفعہ (۱۸) میں باقاعدہ طور پر ثابت کئے جا چکے ہیں۔

(۵) فرض کرو کہ $ف(لا) = لوک (لا + ۱)$ (۱۴)

$$\text{اسلئے ف (لا) = (لا) } \frac{1}{1+لا} \text{ اور ن } < \text{ اکیلے ف (ن) (لا) = (لا) } \frac{1-لا}{(1+لا)}$$

پس ف (ن) = ف (ن) اور ن < اکیلے ف (ن) = (ن) (لا) = (لا) (ن) ... (۱۵)
میکلورن کے نمائے طے میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لوگ (لا) = لا - } \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} - \dots + \frac{لا^۱۰}{۱۰} \dots (۱۶)$$

دفعہ ۱۷۵ دیکھو۔
جب کبھی دئے ہوئے تفاعل کے ن میں مشتق کے لئے عام ضابطہ معلوم نہ ہو تو ایسی صورت میں متواتر مشتقات حسب ضرورت دریافت کر لینے چاہئیں۔ بعض اوقات حسب ضرورت ط کی آخری سطریں ایسی رقموں کو نظر انداز کرتے سے مجمل کی جاسکتی ہیں جن رقموں سے آخری نتیجہ میں کچھ حاصل نہیں ہوتا۔

مثال - مس لا کو لا تک پھیلاؤ۔

$$\text{ف (لا) = مس (لا)}$$

رکھنے سے بالترتیب حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ف (لا) = ۱ + مس لا}$$

$$\text{ف (لا) = مس لا قسط لا = ۲ مس لا + ۲ مس لا}$$

$$\text{ف (لا) = (۲ + ۶ مس لا) قسط لا = ۲ + ۶ مس لا + ۶ مس لا}$$

$$\text{ف (لا) = (۶ + ۲۴ مس لا) قسط لا}$$

$$۱۶ مس لا + ۴۰ مس لا + ۲۴ مس لا$$

$$\text{ف (لا) = (۱۶ + ۴۰ + ۲۴ مس لا) قسط لا}$$

$$۱۶ + ۱۳۶ مس لا + ۲۴۰ مس لا + ۱۲۰ مس لا$$

$$\text{ف (لا) = ۲۴۲ مس لا قسط لا + وغیرہ وغیرہ}$$

$$\text{ف (لا) = ۲۴۲ قسط لا + \dots}$$

آخری دو سطروں میں وہ رقمیں چھوڑ دی گئی ہیں جن سے 'ف' (ن) کی قیمت میں کچھ فرق نہیں آئیگا۔

$$\begin{array}{ll} \text{ف} (۰) = ۱ & \text{ف} (۰) = ۰ \\ \text{ف} (۰) = ۲ & \text{ف} (۰) = ۰ \\ \text{ف} (۰) = ۱۶ & \text{ف} (۰) = ۰ \\ \text{ف} (۰) = ۲۴۲ & \text{ف} (۰) = ۰ \end{array}$$

اور پھیلاؤ ہوگا

$$\begin{aligned} \text{مس لا} &= \text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۵} + \frac{\text{لا}^۲۴۲}{۷} + \dots \\ &= \text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۱۵} + \frac{\text{لا}^۱۴}{۳۱۵} + \dots \quad (۱۷) \end{aligned}$$

پھیلاؤ میں صرف طاق قوتیں واقع ہوتی ہیں۔ یہ امر اس بات سے بھی واضح ہے کہ 'مس لا' کی علامت لا کے ساتھ بدلتی ہے۔

۱۸۵۔ میکلورن اور ٹیلر کے مسائل کا ثبوت۔ ن قوت کے بعد باقی

فرز کرو کہ 'ف' (لا) اور اس کے پہلے (ن-۱) شقوق، تیسرا لا کے مسلسل تغاقل ہیں جبکہ لا حد درجہ اور طے کے درمیان بشمول طرفین واقع ہے اب فرض کر لے کہ

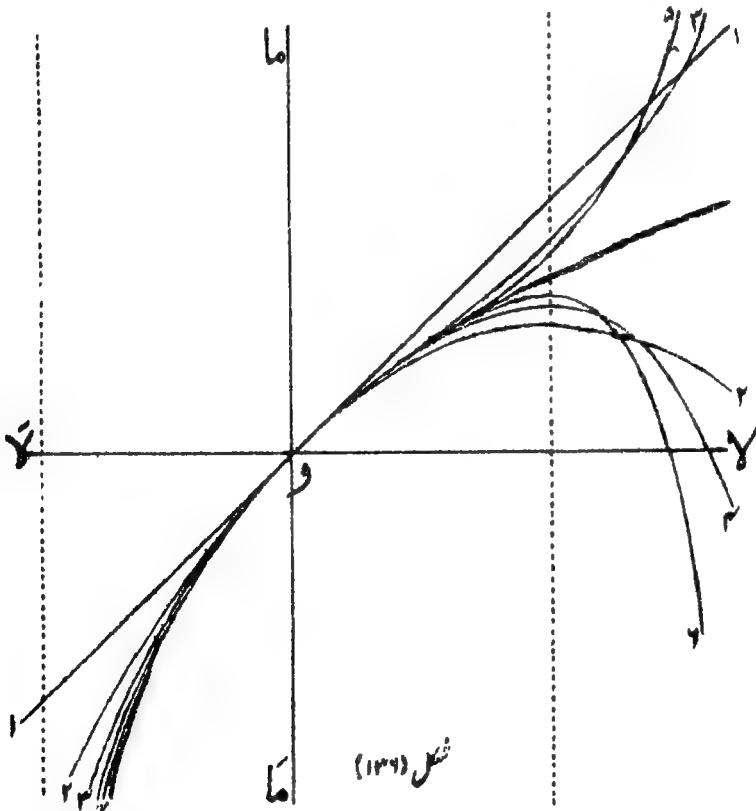
$$\text{ف} (لا) = \text{ف} (ن) (لا) + \text{ف} (ن-۱) (لا) \dots (۱)$$

$$\text{جہاں ف} (ن) (لا) = \text{ف} (۰) (لا) + \text{ف} (۱) (لا) + \dots + \text{ف} (ن-۱) (لا) \dots$$

$$+ \frac{\text{لا}^{۱-۵}}{۱-۵} \text{ف} (ن-۱) (۱) \dots (۲)$$

یعنی ف (لا) میکلورن کے پھیلاؤ کی پہلی ن قوتوں کا حاصل جمع ہے اور 'ف' (لا) فی الحال تغاقلات 'ف' (لا) اور ف (ن) (لا) کے فرق کیلئے

کہ نقطہ (لا) = پیر دے ہوئے مخنی ما = ف (لا) سے اس کا (ن - ا) رتبہ کا (ویکھو دفعہ ۱۸۹) تماس ہو۔ اب سوال یہ ہے کہ ایک خاص وسعت کے اندر (لا) کی تمام فہمیوں کے لئے، ایک مخنی کے ممکن ہٹاؤ کے حدود، دوسرے مخنی سے دریافت کئے جائیں، اس ہٹاؤ کا مخنی مخنیوں کے معینوں کے فرق سے کیا جاتا ہے۔ مشکل ۱۲۶ میں اس امر کی توضیح کی گئی ہے موٹی لکیر سے مخنی ما = نوک (ا + لا) کی ترسیم دکھائی گئی ہے اور باریک لکیر سے ذیل کے ”تقریری مخنی“ دکھائے گئے ہیں۔



$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} > \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} > \frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} > \dots > \frac{f'(x)}{1!} > f(x)$$

اور چونکہ $f^{(n)}(x) = 0$

اس لئے $\frac{f^{(n)}(x)}{n!} > \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} > \frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} > \dots > \frac{f'(x)}{1!} > f(x)$ (۹)
اسی قسم کی دلیل سے حاصل ہو سکتا ہے کہ

$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} > \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} > \frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} > \dots > \frac{f'(x)}{1!} > f(x)$ (۱۰)
اور اسی طرح دیگر نتیجے حاصل کئے جا سکتے ہیں حتیٰ کہ ہم ذیل کے نتیجے پر پہنچتے ہیں۔

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} > \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} > \frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} > \dots > \frac{f'(x)}{1!} > f(x)$$

پس ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} = \dots = \frac{f'(x)}{1!} = f(x)$$

جہاں ج کوئی مقدار اور $f^{(n)}(x)$ کے درمیان ہے۔
موجودہ اطلاق میں چونکہ $f^{(n)}(x) = 0$ اور جب (۱-ن) کا منطق صحیح متبادل ہے اس لئے اس کا ان کا۔
و ان مشتق وقفہ ۶۴ کی رو سے صفر ہوگا اور اس لئے جب (۱-ن) کا ان۔
و ان مشتق نتیجہ (۱) سے $f^{(n)}(x) = 0$ کے مساوی ہوگا بشرطیکہ آخر الذکر مشتق وجود رکھتا ہو۔
اس سے اخذ ہوتا ہے کہ

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} = \dots = \frac{f'(x)}{1!} = f(x)$$

جہاں ج وقفہ صفر سے $f^{(n)}(x)$ کی بڑی سے بڑی

قیمت اور چھوٹی سے چھوٹی قیمت کے درمیان واقع ہے۔ اور اب ہم فرض کرتے ہیں کہ فن (لا) وقفہ لا = سے لا = ھ کے درمیان مسلسل ہے اس لئے صفر اور ھ کے درمیان لا کی ایک ایسی قیمت ضرور ہوگی کہ فن (لا) = ج۔ اگر اس قیمت کو ھ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{جب } (لا) = \frac{لا}{لا} \text{ فن (لا) طما ھ) ... (۱۴)}$$

جہاں طما کی قیمت کے بارے میں ہمیں صرف یہ معلوم ہے کہ یہ صفر اور ایک کے درمیان ہے۔

نتیجہ (۱۴) لا = ۰ اور لا = ھ کے وقفہ میں شمول طرفین صحیح ہے

اور ہمیں لا = ھ درج کر کے فن (لا) اور جب (لا) کی قیمتیں (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فن (ھ) = فن (۰) + ھ فن (۰) + \frac{ھ}{لا} \text{ فن (۰) + ...}$$

$$+ \frac{ھ}{ان-۱} \text{ فن (۱-۰) + \frac{ھ}{ان} \text{ فن (۰) طما ھ) (۱۵)}$$

اس شکل میں مسئلہ میکلوورن بالکل ٹھیک ہے۔ اس میں مفروضہ یہ ہے کہ فن (لا) اور اس کے فن - وین مشتق تک تمام مشتق وقفہ صفر اور ھ کے درمیان مسلسل ہیں۔ لیکن ان شرائط میں کہ فن (لا) وجود رکھتا ہو اور پورے وقفہ میں مسلسل ہجرتی تمام شرائط شامل ہیں۔ اگر ہم لکھیں کہ فن (لا) = فن (ل + لا) ... (۱۶) تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{فن (ل + ھ) = فن (ل) + ھ فن (ل) + \frac{ھ}{لا} \text{ فن (ل) + ...}$$

$$+ \frac{1-n}{1-n} \text{ فہا}^{(1-n)} (ل) + \frac{n}{n} \text{ فہا}^{(n)} (ل+ل+ل+ل) (۱۴)$$

۳۸۸

جہاں پہلے کے طرح کے طہا۔
پہلے ٹیلر کی صحیح شکل ہے۔ اس سلسلہ میں یہ مان لیا گیا ہے کہ
فہا^(ن) (لا) وقفہ لا = ل اور لا = ل + ہ میں بشمول طرین وجود رکھتا ہے
اور سلسلہ ہے۔

نتائج (۱۵) اور (۱۶) میں آخری قسمیں بالترتیب سیکلورن اور ٹیلر کے
مسائل میں لنگرانج کی باقی کی شکلیں کیلاتی ہیں اس کتاب میں چند ایسے
نتائج حاصل کئے گئے ہیں جن کی عام شکل ضابطہ (۱۷) ہے۔
مثلاً ن = ۱ دیکھئے

$$\text{فہا} (ل+ل) = \text{فہا} (ل) + \text{فہا} (ل+ل+ل+ل) \dots (۱۸)$$

اور ن = ۲ رکھئے

$$\text{فہا} (ل+ل+ل) = \text{فہا} (ل) + \text{فہا} (ل+ل) + \frac{1}{2} \text{فہا} (ل+ل+ل+ل) \dots (۱۹)$$

اور یہ بالترتیب دفعہ ۵۶ (۹) اور دفعہ ۵۷ (۱۰) کے مطابق ہیں۔
۱۸۶۔ متبادل اثبات ثبوت۔

ٹیلر یا سیکلورن کے سلسلہ کا ثبوت جو تشریح دیا جاتا ہے وہ دفعہ
(۲) کے طرز ثبوت کے موافق ہوتا ہے۔ کسی دئے ہوئے منفی
ما = فہا (لا) (۱)
کا مقابلہ منفی

$$\text{ما} = ل + ل + ل + ل + ل + \dots + ل + ل + ل + ل + ل + \dots (۳)$$

سے کیا جاتا ہے۔ یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ دوسرے منحنی کے (۱+ل) سلسلے
اس شرط سے دریافت کئے جاتے ہیں کہ دونوں منحنی نقاط لاء اور لا+ل

(۱) = ۰ اور (۲) = ط_{۱-۰} جہاں $۱ < ط_{۱-۰} < ۱$.

پس فائز (طہ) = (۴)

جہاں ۱ کٹھن

اب (۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ

فان^(ن) لا = ف^(ن) لا - ان^(ن) لا (۸)

اس لئے (۷) کو استعمال کرنے سے

الن = ا ن = الف (ن) طاهر) (9)

اس لئے (۳) اور (۹) کو (۴) میں درج کرنے سے پہلے کی طرح حاصل ہوتا ہے،

f = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots

$$+ \frac{h^{1-n}}{1-n} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n} f^{(n)}(\xi) \dots (1)$$

اس مسئلہ کی صداقت کے شرائط وہی ہیں جو دفعہ ۱۸۵ میں نتیجہ (۱۵) کے بعد درج کئے گئے ہیں۔

۱۸۷- کوشی (Cauchy) کی باقی کی شکل -

ن رتھوں کے بعد باقی کی رقم کو دوسری شکل میں ذیل کے طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(Homersham Cox)

(Cam. and Dub. Math. Journ.)

پھر مذکورہ بالا اثبوت کا زیادہ تر حصہ یہی ہے جو ہر شہسپا کا گس

نے کیمبرج اور ڈبلن کے رسالہ ریاضی

۱۸۵۱ء میں دیا تھا

اسے (۱+طما) اور ذیل کے نمونے کے ن اجزاء کا حاصل ضرب خیال کیا جاسکتا ہے

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{۱+۱-۴}{۵} \frac{۱}{۱+طما} \text{ یا } (۱-۱+۱+۴) \frac{۱}{۱+طما} \dots\dots\dots (۵)$$

۴۹۱ اگر $۱ < لا < ۱$ ۔ تو کسر $\frac{۱}{۱+طما}$ کی قیمت صفر اور لا کے درمیان ہوگی اور چونکہ (۵) کا پہلا جزو ضربی ر کے برعکس کے ساتھ ساتھ انتہائی قیمت - کی طرف بٹا رہا ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ن کو کافی بڑا لینے سے جملہ (۴) کی قیمت کو کسی مخصوص چھوٹی مقدار سے کم کیا جاسکتا ہے۔
اس لئے اگر $۱ < لا < ۱$ ۔ تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$(۱+لا) = ۱+۴+لا + \frac{۴(۱-۴)}{۲ \times ۱} لا + \dots\dots\dots \infty \text{ تک} \dots\dots\dots (۶)$$

لیکن لا کے منفی ہونے کی صورت میں مذکور بالا نتیجہ نہیں حاصل ہوتا اگرچہ $۱ > لا > ۱$ کیونکہ لا = - لا درج کرنے سے کسر $\frac{۱}{۱+طما}$ کی قیمت

ایک سے صرف اسوقت کم ہے جبکہ $طما > \frac{۱-لا}{۲}$ اور اگر $لا < \frac{۱}{۲}$ سے تو طما کو اس قیمت سے کم فرض کر نیکی واسطے کوئی دلیل نہیں ہے۔

اس صورت میں باقی کی رقم کو کوئی بھی شکل [دفعہ ۱۸ (۵)] میں لکھنا مفید ہوگا۔ اب (۴) کی بجائے ذیل کا جملہ حاصل ہوتا ہے

$$۴(۱-۴) \dots\dots\dots (۱+ن-۴) \frac{۱}{(۱+طما) \dots\dots\dots (۱-ن-۴)} \dots\dots\dots (۷)$$

یہ م (۱+طما) اور ذیل کے نمونے کے (ن-۱) اجزاء کا حاصل

ضرر ہے

$$(۸) \dots\dots\dots \frac{۴}{۱+۳۷۷} \text{ لا۔ طہلا}$$

اگر لا مثبت ہے تو اس جملہ کی انتہا صفر اور۔ لا کے درمیان ہوگی پس اگر لا > ۱ تو باقی کی انتہا پہلے کی طرح صفر ہے۔
اگر لا = ۱۔ لا جبکہ ۱ < لا <۔ تو جملہ (۸) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$(۹) \dots\dots\dots \frac{۴}{۱+۳۷۷} \text{ لا۔ طہلا}$$

جس کی انتہا صفر اور لا کے درمیان ہے۔
اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ باقی کی رقم (۱) کی انتہا۔ ۱ اور ۱ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہے۔

$$(۱۰) \dots\dots\dots \text{اگر ف (لا) = لوگ (۱+لا)}$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots \text{تو } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \text{ ف (لا) = } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \text{ (۱+لا)}$$

پہلے جزو ضربی کی انتہائی قیمت۔ صفر ہے اور اگر لا مثبت ہو اور لا سے

تو $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ ۱ پس لا کی انتہائی قیمت جبکہ لا سے صفر ہے اور

دفعہ ۸۴ کا پھیلاؤ (۱۶) لا = ۰ سے لا = ۱ کے لئے بشمول طرفین صحیح ہے
شکل ۱۳۶ دیکھو۔

باقی کی رقم کی اوپر والی شکل سے لا کی ان منفی قیمتوں پر بھی غور نہیں کر سکتے جن کے لئے لا > ۱ اس لئے بجائے (۱۱) کے گوشہ کی باقی کی رقم یہ حاصل ہوتی ہے

$$(۱۲) \dots\dots\dots \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \text{ (۱+لا)}$$

اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مساوات (۵)، (۶)، (۷) میں $\frac{فرما}{فرلا}$ اور $\frac{فرما}{فرلا}$ کی قیمتیں منحنی (۴) سے حاصل کی گئی ہیں۔ ان مساواتوں سے دائرہ یگانہ طہ پر تعین ہو جاتا ہے یعنی مرکز کے محدود اور نصف قطر ذیل سے حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{\left\{ 1 + \left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^2 \right\}}{\frac{فرما}{فرلا}} = \frac{1 + \left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^2}{\frac{فرما}{فرلا}} = \frac{فرما}{فرلا} \quad (۸)$$

$$\text{اور نصف قطر } = \frac{\left[1 + \left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^2 \right]^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{فرما}{فرلا}} \quad (۹)$$

دفعہ ۱۳۵ دیکھو۔
مذکورہ بالا بحث کی توسیع کی جاسکتی ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر دو منحنی H متصل نقطوں پر قطع کریں یعنی N میں رتبہ کا تماس رکھیں تو

$\frac{فرما}{فرلا}$ ، $\frac{فرما}{فرلا}$ ، $\frac{فرما}{فرلا}$ $\frac{فرما}{فرلا}$
کی قیمتیں زیر غور نقطہ پر دونوں منحنیوں کے لئے مساوی ہونگی، دفعات ۱۸۵ اور ۱۸۶ کی تحقیقات سے، N میں رتبہ کے نقطہ تماس کی پڑوس میں 'دونوں منحنیوں کے باہم قریب ہونے کے ناپ کا تعین کیا جاسکتا ہے۔ مفروضہ کے روئے نقطہ

فما (۱) = خما (۱) ، فما (۲) = خما (۲) ، فما (ن) = خما (ن) ، (۱۰)
اور ملے اگر فما (۱) کی تعریف (۲) کے مطابق کی جائے تو
فما (۲) = فما (۱) ، فما (۳) = فما (۲) ، فما (ن) = فما (ن-۱) ، (۱۱)

۲۹۴

اس سے اخذ ہوتا ہے کہ مناسب شرط کے تحت

$$\text{فا} (۱+۵) = \frac{۱+۵}{۱+۵} \text{فا} (۱+۵) \dots (۱۲)$$

جہاں $\text{فا} > ۱$ پس اگر فا اتنا چھوٹا ہو تو معینوں کا فرق $(۱+۵)$ دیں رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے۔ علاوہ ازیں اس کی علامت کا $ھ$ کے ساتھ بدلنا یا نہ بدلنا ان کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہے۔

مثلاً منحنی کا مماسی خط سے ہٹاؤ نقطہ تماس کی پڑوس میں اکثر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے اور اس لئے عموماً منحنی اس نقطہ پر مماسی خط کو عبور نہیں کرتا۔ منحنی کا انہی دائرہ سے ہٹاؤ تیسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے اور اس لئے اکثر منحنی دائرہ کو عبور کرتا ہے۔ صفحہ ۹۷ پر شکل ۱۱۶ دیکھو۔ لیکن اگر دائرہ سے تماس چوتھے رتبہ کا ہو جیسا کہ مخروطی کے راس پر ہوتا ہے تو منحنی دائرہ کو عبور نہیں کرتا۔ اسی بات کی مزید مثالیں صفحہ ۹۷ پر شکل ۱۳۶ میں دکھائی گئی ہیں، منحنیات ۱۳۵ منحنی $\text{فا} = \text{لوک} (۱+۵)$ کو عبور نہیں کرتے لیکن منحنیات ۱۳۶، ۱۳۷ عبور کرتے ہیں۔

۱۹۰۔ اعظم اور اقل قیمتیں۔

اگر $\text{فما} (۱)$ متغیر فا کا ایسا تفاعل ہو جس کے پہلے اور دوسرے مشتق متغیر کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہوں تو

$$\text{فما} (۱+۵) - \text{فما} (۱) = ۵ \text{فما} (۱) + \frac{۵}{۲} \text{فما} (۱+۵) \dots (۱)$$

جہاں $\text{فا} < ۱$ اس میں $ھ$ کو کافی چھوٹا لینے سے بائیں جانب کی دوسری رقم کو عموماً مقدار میں پہلی رقم سے چھوٹا بنایا جاسکتا ہے اور اس صورت میں $\text{فما} (۱+۵) - \text{فما} (۱)$ کی علامت وہی ہوگی جو $\text{فما} (۱)$ کی ہے یعنی $ھ$ کے ساتھ اسکی علامت بدلے گی۔ اب اگر $\text{فما} (۱)$ تفاعل $\text{فما} (۱)$ کی اعظم یا اقل قیمت ہو تو فرق $\text{فما} (۱+۵) - \text{فما} (۱)$ کی علامت $ھ$ کی

کافی چھوٹی قیمتوں کے لئے ایک ہی ہوگی خواہ وہ مثبت ہو یا منفی۔
پس موجودہ شرائط کے ماتحت تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت کے لئے
ضروری ہے کہ فہما (۱) =۔
اب فرض کرو کہ فہما (۱) =۔ تو نتیجہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہما (۱+ھ) - فہما (۱) = } \frac{\text{ھ}}{\text{ن}} \text{ فہما (۱+طہاھ) (۲)}$$

جب ھ کافی چھوٹا ہو تو بائیں جانب کی علامت وہی ہوگی جو فہما (۱)
کی ہے۔ پس اگر فہما (۱) مثبت ہے تو فہما (۱+ھ) > فہما (۱) سے
خواہ ھ مثبت ہو یا منفی یعنی فہما (۱) اقل قیمت ہے۔

اسی طرح اگر فہما (۱) منفی ہے تو فہما (۱) اعظم قیمت ہے۔
اگر فہما (۱) بھی فہما (۱) کے ساتھ صفر ہو جائے تو (۱) کے پھیلاؤ میں
زائد رقوم لینا ضروری ہوگا۔
عام صورت پر غور کر نیچے لئے فرض کرو کہ

$$\text{فہما (۱) =۔ ، فہما (۱) =۔ ، فہما (۱) =۔ (۳)}$$

$$\text{لیکن فہما (۱) \neq (۴)}$$

$$\text{تو فہما (۱+ھ) - فہما (۱) = } \frac{\text{ھ}}{\text{ن}} \text{ فہما (۱+طہاھ) ... (۵)}$$

اگر ھ کافی چھوٹا ہے تو اس کی علامت وہی ہے جو ھ فہما (۱)
کی ہے۔ اگر ن طاق ہے تو اس کی علامت ھ کی علامت پر منحصر ہے
اور اس لئے اس نقطہ پر تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت نہیں ہے۔ لیکن اگر
ن جفت ہے تو اس نقطہ کا اعظم یا اقل ہونا فہما (۱) کے منفی یا مثبت
ہونے پر منحصر ہے۔

علامت میں اسے ذیل کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔ (۱) کسی ہی مولیٰ
قیمت کے لئے تفاعل فہما (۱) کی اعظم یا اقل قیمت صرف اس صورت میں

ہوگی جبکہ لا کی اس قیمت کے لئے سب سے پہلا صفر نہ ہونے والا شقوق
جفت رتبہ کا ہو، ورنہ نہیں ہوگی۔
تفاعل کا اعظم یا اقل ہو، اس شقوق کے منفی یا مثبت ہونے پر مبنی ہے۔

مثال ۱ :- فم (لا) = جمن لا + جم لا (۶)

اس لئے فم (لا) = جمن لا - جب لا
فم (لا) = جمن لا + جب لا
فم (لا) = جمن لا - جب لا
فم (لا) = جمن لا + جب لا
لا = ۰ کے لئے صفر نہ ہونے والا پہلا شقوق فم (لا) جو تھے رتبہ کا ہے اور
چونکہ فم (۰) مثبت ہے لہذا فم (۰) تفاعل فم (لا) کی اقل قیمت ہے
یہ امر فم (لا) کے پھیلاؤ سے بھی ظاہر ہے

فم (لا) = ۲ (۱ + $\frac{لا}{۱۳}$ + $\frac{لا}{۱۱}$ +) - (۷)

مثال ۲ :- فرض رکھو کہ ق = ب جم طم + ج جم طم (۸)

اس سے فرق
ب جب طم + ج جب طم

= جب طم (۴ ج جم طم - ب)

ذرا ق
فرق طم = ب جم طم + ۴ ج جم طم

= جم طم (۴ ج جم طم - ب) - ۴ ج جب طم

تو ق
فرق طم = ب جب طم - ۸ ج جب طم

فرق طم = ب جم طم - ۱۶ ج جم طم

اختصار کے لئے صورت پہلے راج کے زاویوں پر غور کرو۔ اگر ب < ۴ ج تو
ق کی مقیم قیمت صرف طم = ۰ کی صورت میں ہے اور طم = ۰ کیلئے

فرق \rightarrow اس لئے ق کی اس مقام پر اعظم قیمت ہے۔

اگر ب \rightarrow ج توق اقل ہے جبکہ ط \rightarrow ۰ اور اعظم ہے جبکہ ط \rightarrow ج \rightarrow ب

اگر ب \rightarrow ج توق ط \rightarrow ۰ کے لئے فرق ، فراق ، فرق $\frac{1}{2}$ صفریں اور

فرق منفی ہے۔ پس ق اعظم قیمت ہے۔

یہ مثال ذیل کے سوال کی تحقیقات میں نمودار ہوتی ہے۔ ایک مربع تیرا انتصابی سنوی میں واقع ہے اور دو چسکنی میخوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں لٹکا ہوا ہے۔ توازن کے مقامات پر غور کرو۔ اگر ب مربع کے وتر یا بین زاوی کا طول ہے اور ج میخوں کے درمیان فاصلہ ہے تو ق توانائی بالقوہ کے تناسب ہے جبکہ میخوں کو ملائے والے خط کو کاٹنے والا بین زاوی انتصابی خط سے ط \rightarrow کا زاویہ بتاتا ہے توازن کے لئے ق کی سقیم قیمت ہونی چاہئے اور قائم توازن کے لئے ق کو اقل ہونا چاہئے۔

۱۹۱۔ مستوی مخنیات کا صفاری ہند

فرض کرو کہ مستوی مخنی کے کسی نقطہ کو سیدمان لیا جاتا ہے اور نقطہ کے پیر کے پاس اور عماد کو محدودوں کے محور مانا جاتا ہے پیر کے متصل مخنی کے کسی نقطہ ن کے محدودوں کو قوس و ن = می کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے۔

اگر اختصار کے لئے تقرقات، بلحاظ اس کے زبر سے ظاہر کئے جائیں تو دفعہ ۱۱ کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

لا = جم فہ ، ما = جب فہ (۱)

اس لئے $لا = جب فم \times فم$ ، $لا = جم فم \times فم$ - جب فم \times فم
 $ما = جم فم \times فم$ ، $ما = جب فم \times فم + جم فم \times فم$ -
 اور اسی طرح -
 اب مسز میکلو رن سے

$$\begin{aligned} لا &= لا + \frac{س}{۱} لا + \frac{س}{۲ \times ۱} لا + \dots \\ ما &= ما + \frac{س}{۱} ما + \frac{س}{۲ \times ۱} ما + \dots \end{aligned}$$

جہاں کہ حرف کے لاحقہ سے اسکی وہ قیمت ظاہر کی گئی ہے جو یہ
 س کے لئے اختیار کرتا ہے۔
 لیکن (۱) اور (۲) میں فم = رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} لا &= لا ، لا = لا ، لا = لا - \frac{۱}{۲} ، \dots \\ ما &= ما ، ما = ما - \frac{۱}{۲} ، ما = ما - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲ \times ۲} ، \dots \end{aligned}$$

جہاں فرس کی بجائے $\frac{۱}{۲}$ لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} پس لا &= س - \frac{س}{۲} + \frac{س}{۲ \times ۲} - \frac{س}{۲ \times ۲ \times ۲} + \dots \\ ما &= س - \frac{س}{۲} + \frac{س}{۲ \times ۲} - \frac{س}{۲ \times ۲ \times ۲} + \dots \end{aligned}$$

جہاں س اور فرس مبادا پر قیمتیں ہیں۔

یہ ضابطہ صغاری ہندسہ کے اکثر سوالات میں مفید ثابت ہونگے۔

مثال (۱) نتیجہ (۵) میں دوسرے ضابطہ سے ظاہر ہے کہ انتہا میں نقطہ ۹۷
 منہی کا نامی درجہ سے مٹاؤ ہے

$$\frac{۱}{۴} \frac{س}{۲} \frac{فرس}{۲} \dots \dots \dots (۶)$$

$$\text{جنبر لا جم لا} = لا - \frac{لا^۲}{۳} + \frac{لا^۴}{۵} - \dots$$

$$\text{فوجم لا} = لا + لا - \frac{لا^۲}{۳} - \frac{لا^۲}{۴} + \frac{لا^۴}{۵} + \frac{لا^۴}{۶} - \dots \quad (۳)$$

$$\text{فوجب لا} = لا + لا + لا - \frac{لا^۲}{۳} - \frac{لا^۲}{۴} - \frac{لا^۴}{۵} - \frac{لا^۴}{۶} + \dots$$

$$\text{قط لا} = لا + لا + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۲}{۴} + \frac{لا^۴}{۶} - \dots \quad (۴)$$

$$\text{لوک قط لا} = لا + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۲}{۱۲} + \frac{لا^۴}{۴۵} - \dots \quad (۵)$$

$$\text{لوک جنبر لا} = لا - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۲}{۱۲} + \frac{لا^۴}{۴۵} - \dots \quad (۶)$$

$$\text{منبر لا} = لا - لا + \frac{لا^۲}{۳} + \frac{لا^۲}{۱۵} - \frac{لا^۴}{۳۱۵} + \dots \quad (۷)$$

$$\text{جم لا} = لا - لا + \frac{لا^۲}{۳} - \frac{لا^۴}{۶} + \frac{لا^۴}{۶} - \dots \quad (۸)$$

$$\text{جم لا} = لا - لا + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۲}{۲} \frac{(۲-۳-۳)}{۳} - \dots \quad (۹)$$

$$\left(\frac{لا}{لا} \right) = لا - لا + \frac{لا^۲}{۳} + \frac{لا^۲}{۳} \frac{(۲-۵-۳)}{۵} - \dots \quad (۱۰)$$

$$\frac{لا}{جب لا} = لا + \frac{لا^۲}{۳} + \frac{لا^۴}{۶} - \dots \quad (۱۱)$$

$$\frac{لا}{جنبر لا} = لا - \frac{لا^۲}{۳} + \frac{لا^۴}{۶} - \dots$$

$$\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{1-1} \quad (12)$$

$$\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad (18)$$

$$\text{اگر عفا} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{ تو ثابت کرد که} \quad (19)$$

$$\text{عفا} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{لا جم عا}}{\text{جم لا جب عا}} = \frac{\text{لا جم عا}}{\text{جم لا جب عا}}$$

$$\text{پس حاصل کرد که} \text{ عفا} = \frac{\text{لا جم عا}}{\text{جم لا جب عا}} = \frac{\text{لا جم عا}}{\text{جم لا جب عا}}$$

$$\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad (20)$$

اور انکا جب لا کی ترسیم سے مقابلہ کرو -
(۲۱) تفاضلات $1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \frac{1}{1} - \frac{1}{5} \frac{1}{1} + \dots$ کی ترسیمیں کھینچو اور انکا
جہم لا کی ترسیم سے مقابلہ کرو -

(۲۲) ثابت کرو کہ دفعہ ۱۸۵ کے ضابطہ (۷۱) میں طما کی انتہائی قیمت
جبکہ ۱ کو بے حد چھوٹا کر دیا جائے عموماً $\frac{1}{1+n}$ ہے -

(۲۳) ثابت کرو کہ اگر ۱ کافی چھوٹا ہے تو سپین کے تقریبی تکمل کے ضابطے (۹)
میں [دفعہ ۱۱۴ (۸)] خطاً تقریباً $\frac{1}{9}$ ۱ فرما ہے -

(۲۴) ثابت کرو کہ فضا (لا) کی اوسط قیمت حدود $1 = 1 - 1$ اور
 $1 = 1 + 1$ کے درمیان ہے

$$\text{فضا (۱)} + \frac{\text{فضا (۱)}}{2} + \frac{\text{فضا (۱)}}{3} + \dots$$

نیز ثابت کرو کہ یہ قیمت حدود کی قیمتوں کے حسابی اوسط سے بقدر ذیل
کے کم ہوتی

$$\frac{\text{فضا (۱)}}{1 \times 2} + \frac{\text{فضا (۱)}}{2 \times 3} + \frac{\text{فضا (۱)}}{3 \times 4} + \dots$$

(۲۵) ایک ہے ہوئے منحنی سے دوسرا منحنی اس طرح بنایا جاتا ہے کہ دوسرا
منحنی کا معین (۱) کسی قیمت ۱ کے لئے حدود 1 ± 1 ۱ میں پہلے
منحنی کے معینوں کے اوسط کے مساوی ہے، یہاں ۱ مقررہ چھوٹی مقدار
ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے منحنی کا معین پہلے منحنی کے معین سے اتنا بڑا ہے
جتنا کہ قوس (جس کے حدود $1 = 1 \pm 1$ ۱ ہیں) کے ڈھیل (Sagitta)

کا ایک تہائی ہے -

امثلہ ۲۳

ہندسی استعمال

(۱) ثابت کرو کہ اگر دفعہ ۱۹۱ کے پھیلاؤ (۴) کو س^۱ تک پھیلا یا جائے تو

$$\begin{aligned} \text{لا} &= \text{س} - \frac{1}{4} \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} + \frac{1}{8} \frac{\text{س}^4}{\text{س}^2} - \frac{1}{8} \frac{\text{س}^6}{\text{س}^2} + \dots \\ \text{ما} &= \frac{1}{2} \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} - \frac{1}{4} \frac{\text{س}^4}{\text{س}^2} + \frac{1}{8} \frac{\text{س}^6}{\text{س}^2} - \dots \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{24} \frac{\text{س}^8}{\text{س}^2} + \frac{1}{24} \frac{\text{س}^{10}}{\text{س}^2} - \dots$$

(۲) اگر کسی منحنی کے نقطہ پر مماس اور عماد کو لا محور اور ما محور بالترتیب مانا جائے اور منحنی کے کسی نقطہ لا^۱ ما کے محدودوں کو فہ^۱ کی رقم میں جہاں فہ^۱ مماس کا لا محور کے ساتھ میلان ہے پھیلا یا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \text{لا} &= \text{س} \text{فہ} + \frac{1}{2} \frac{\text{فرہ} \text{فہ}^2}{\text{فرہ}^2} - \frac{1}{6} \frac{\text{فرہ}^3 \text{فہ}^3}{\text{فرہ}^2} + \dots \\ \text{ما} &= \frac{1}{2} \frac{\text{س} \text{فہ}^2}{\text{فرہ}^2} + \frac{1}{3} \frac{\text{فرہ} \text{فہ}^3}{\text{فرہ}^2} + \dots \end{aligned}$$

(۳) ثابت کرو کہ گذشتہ سوال کے محروں کے مطابق مرکز انحناء کے محدود ذیل سے ما مل ہوئے

$$\begin{aligned} \text{لا} &= - \frac{1}{2} \frac{\text{فرہ} \text{فہ}^2}{\text{فرہ}^2} - \frac{1}{6} \frac{\text{فرہ}^3 \text{فہ}^3}{\text{فرہ}^2} + \dots \\ \text{ما} &= \text{س} + \frac{1}{2} \frac{\text{فرہ} \text{فہ}^3}{\text{فرہ}^2} + \frac{1}{6} \frac{\text{فرہ}^3 \text{فہ}^3}{\text{فرہ}^2} + \dots \end{aligned}$$

(۴) اگر وادرن منحنی کے دو متصل نقطے ہوں اور ن ق و ن پر

عمود کھینچا جائے اس طرٹ کہ وہ نقطہ و پر کے عماد کو ق پر ملے تو ثابت کرو کہ
انتہا میں وق = ۷۲ -

(۵) اگر منحنی کی قوس برون چھوٹی سی قوس لی جائے اور وق نقطہ
و کے ماس پر چھوٹا سا فاصلہ ہو اور اگر ن ت محدودہ نقطہ و کے عماد کے
انتہا میں ج پر خستہ تو ثابت کرو کہ وج = ۷۲ -

(۶) اگر ن کی منحنی پر دو متصل نقطے ہوں اور نقطہ ن کے ماس پر ت ایسا
نقطہ لیا جائے کہ ن ت = وتر ن ق اور ت ق نقطہ ن کے عماد کو
ج پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ن ج کی انتہائی قیمت ۷۲ ہوگی - ہے
(۷) ثابت کرو کہ وتر ن کا وسطی عمود و پر کے عماد کو ایسے نقطہ پر کاٹتا

جس کا مرکز انتہا و انتہائی فاصلہ $\frac{1}{16}$ سے $\frac{1}{8}$ فرما ہے جہاں سے ون
(۸) منحنی کے دو متصل نقطوں ن ق کے ماس ت پر قطع کرتے ہیں اور
و وتر ن ق کا وسطی نقطہ ہے ثابت کرو کہ ت و منحنی کے عماد سے
ناویس $\left(\frac{1}{16} \text{ فرما} \right)$ بناتا ہے -

(۹) ثابت کرو کہ اگر ن ق منحنی کی ایک چھوٹی قوس ہے تو وتر کے
مقابلہ میں قوس بقدر $\frac{1}{16}$ سے $\frac{3}{16}$ کے بڑی ہے اور ن اور ق پر کے
ماسوں کے طواؤں کا حامل جمع قوس سے بقدر $\frac{1}{16}$ سے $\frac{3}{16}$ بڑا ہے -

(۱۰) ثابت کرو کہ نقطہ قرن کے قریب منحنی کی شکل تقریباً ۱ ما = لا سے
ظاہر ہو سکتی ہے جہاں $1 = \frac{9}{8} \text{ فرما}$ -

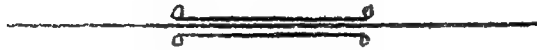
(۱۱) ثابت کرو کہ نقطہ عطف کے قریب منحنی کی شکل تقریباً ۱ ما = $\frac{1}{4}$ فرج لا

سے ظاہر ہو سکتی ہے جہاں ج انحناء کی قدر ہے۔
 (۱۳) ثابت کرو کہ اگر ن منحنی کا کوئی نقطہ ہے تو ن کے قریب کے حصہ
 کے پریچھ کی شکل (جسکے نقطہ ن کا مرکز انحناء مبدا ہے)

۱ ماہ ۱۱ سے بیان کی جا سکتی ہے جہاں $r = 1$ فرما۔

(۱۳) ثابت کرو کہ اگر ن اقل یا اعظم انحناء کا نقطہ ہو تو پریچھ کی شکل تقرباً
 ۱ ماہ ۱۱ سے بیان کی جا سکتی ہے جہاں $r = 1$ فرما۔

$$\frac{9}{8} = 1 \quad \text{فرما} \quad \text{ہے، جہاں}$$



۵۰۱)

سورہ طحاں باب

متعدد متبوع متغیروں کے تفاعل

۱۹۲۔ مختلف رتبوں کے جزوی مشتقات۔ اگر

دو یا زیادہ متبوع متغیروں 'لا'، 'ما'، ... کا تفاعل ہو تو جزوی مشتقات

جف ع ، جف ع
(۱) جف لا جف ما

بھی 'لا'، 'ما' کے تفاعل ہونگے اور ان متغیروں کے لحاظ سے
ایک نکتہ قی نکالا جاسکتا ہے۔ پس اگر

(۲) ع = فبا (لا'، ما) (۲)

تو دوسرے رتبہ کے جزوی مشتقات بنائے جاسکتے ہیں

جف (جف ع) ، جف (جف ع) ، جف (جف ع) ، جف (جف ع) ، جف (جف ع) ، جف (جف ع)
جف لا (جف لا) ، جف ما (جف لا) ، جف لا (جف ما) ، جف ما (جف ما) ، جف لا (جف ما) ، جف ما (جف ما)
اور انہیں اکثر اس طرح لکھا جاتا ہے

جف ع ، جف ع ، جف ع ، جف ع ، جف ع ، جف ع
(۳) جف لا جف ما جف لا جف لا جف ما جف ما

اس میں ظاہر ہو گا کہ دوسری اور تیسری علامتوں میں معنی کا اصولی فرق
ہے دو تول صورتوں میں دو تکل مختلف ترتیب میں یکے بعد دیگرے

سے تعزیر کیا جائیگا۔ اور دوسرے رتبہ کے مشتعل خاصہ (۲) کو

فني، فني - - - - - (7)

(۵) مثال ۱۔ اگر $e = \frac{1}{2}$ (۸)

$$\frac{\text{جفء لا}}{\text{جفء لا}} = \frac{\text{م (م-1)} (1-\text{لا})}{\text{لا}} = \frac{\text{جفء لا}}{\text{جفء لا}} = \frac{\text{م (م-1)} (1-\text{لا})}{\text{لا}}$$

جفأع = م لا ا ن ا جفأع
جفأحفا = جفأحفا

مثال ۲۔ اگر $xy = 1$ سے $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ (۱۱)

$$(12) \dots\dots\dots \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}}$$

{فہ (لا + ہ + ما + گ) - فہ (لا + ہ + ما) - { - فہ (لا + ما + گ) - فہ (لا + ما)}
 = {فہ (لا + طہ + ہ + ما + گ) - فہ (لا + طہ + ہ + ما) - { (۷)
 جہاں ۱ طہ + ۷ اور اس عمل میں ما کی قیمت میں کچھ تغیر نہیں
 کیا گیا۔ (۵۰)

پس (ہ + گ) = فہ (لا + طہ + ہ + ما + گ) - فہ (لا + طہ + ہ + ما) (۸)
 ک

اب اگر لکھا جائے

ف (ما) = فہ (لا + طہ + ہ + ما) (۹)
 تو مذکور بالا مسئلہ کے کمر استعمال سے

ف (ما + گ) - ف (ما) = گ فہ (لا + طہ + ہ + ما + گ) (۱۰)
 یعنی فہ (لا + طہ + ہ + ما + گ) - فہ (لا + طہ + ہ + ما)

= گ فہ (لا + طہ + ہ + ما + طہ + گ) (۱۱)

اس لئے خہ (ہ + گ) = فہ (لا + طہ + ہ + ما + طہ + گ) (۱۲)

جہاں طہ + طہ صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں۔
 بالکل اس طرح ثابت کر سکتے ہیں کہ

خہ (ہ + گ) = فہ (لا + طہ + ہ + ما + طہ + گ) (۱۳)

جہاں طہ + طہ بھی صفر اور ایک کے درمیان ہیں۔

یہ نتائج ٹھیک ہیں بشرطیکہ لا + ہ + ما + گ متغیروں کے اس احاطہ میں واقع
 ہوں جس کے بارے میں مذکورہ بالا شرائط بیان کی گئی ہیں۔

اب اگر ہ اور گ کو لا انتہا جھوٹا بنا دیا جائے تو (۱۳) اور (۱۲) کا مقابلہ
 کرنے سے اور مشتقات کے تسلسل کی رو سے ظاہر ہے کہ

پس نہا نہا خہ (ہ'ک) = فہا (لا'ما) ... (۱۶)

اسی طرح حاصل ہو سکتا ہے

نہا نہا خہ (ہ'ک) = فہا (لا'ما) ... (۱۷)

پس اگر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ کسر (۴) کی انتہائی قیمت جبکہ ہ اور ک کو لا انتہا چھوٹا کر دیا جاتا ہے یگانہ ہے اور ہ'ک کے صفر ہونے کی ترتیب پر منحصر نہیں ہے تو مسئلہ (۳) فوراً حاصل ہوتا ہے۔ لیکن ایک آسان مثال سے ظاہر ہو جائیگا کہ ہر صورت میں بغیر فرید غور کے یہ فرض کر لینا صحیح نہیں ہے

اگر ف (ہ'ک) = $\frac{ہ'ک}{ہ+ک}$

تو نہا نہا ف (ہ'ک) = ۱ - اور نہا نہا ف (ہ'ک) = $\frac{ہ'ک}{ہ+ک}$

مثال: ہر فلا + ن فرما = ... (۱۸)

کے ٹھیک تقریبی ہونے کی ضروری شرط دفعہ ۱۵۵ کے مطابق ہے

جف م = $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}$... (۱۹)

کیونکہ اگر جملہ (۱۸) فرع کے مساوی ہو تو

م = $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور ن = $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$... (۲۰)

اور اس لئے (۱۹) کے دونوں جزوی تفرقات میں سے ہر ایک

جف ع یا جف ع

جف م جف لا یا جف لا جف م

کے مساوی ہے۔ اس مسئلہ کے عکس کے طور پر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر شرط (۱۹) صحیح ہے تو (۱۸) ٹھیک تقریبی ہوگا۔

فرض کرو کہ و تفاعل م فر لا کو جمیں تکمل، ما کو مستقل مان کر نکالا گیا ہے ظاہر کرتا ہے

اس لئے
$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \text{م} \dots \dots \dots (۲۱)$$

اور
$$\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا جف ما}}$$

یعنی
$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} (\text{ن} - \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}) = \dots \dots \dots (۲۲)$$

اب دفعہ ۵۶ کے مطابق اس سے ظاہر ہے کہ لا کے لحاظ سے ن - $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$ مستقل ہے، یعنی صرف ما کا تفاعل ہے۔ اسکی قیمت ف (ما) سے ظاہر ہے تو

$$\text{ن} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \text{ف (ما)} \dots \dots \dots (۲۳)$$

اب اگر ہم لکھیں
$$\text{ع} = \text{و} + \text{ف (ما)} \dots \dots \dots (۲۴)$$
 تو نتائج (۲۱) اور (۲۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \text{م} \text{ اور } \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{ن} \dots \dots \dots (۲۵)$$

اور اس لئے
$$\text{م فر لا} + \text{ن فر ما} = \text{فر ع} \dots \dots \dots (۲۶)$$

۱۹۲۔ ٹیلر کے مسئلہ کی توسیع :-

فرض کرو کہ ف (لا، ما) متغیروں لا اور ما کا ایسا تفاعل ہے جو تغیریوں کی زیر غور قیمتوں کے لئے مسلسل ہے اور کسی خاص ذنبہ تک اس کے مشتقات بھی مسلسل ہیں اور

ف (ا، ہ، ب، گ)
$$\dots \dots \dots (۱)$$
 کا پھیلاؤ ہ اور گ کی صعودی قوتوں میں درکار ہے۔ پہلے ہم ہ اور گ

سلسلہ ہیں۔ نتیجہ (۳) کو ذرا مختلف ترتیم میں ذیل کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$فہ (لا + ہ' + ک) = فہ (لا' + ما) + (ہ' جف' فہ + ک جف' فہ) \frac{جف' لا}{جف' ما}$$

$$+ \frac{1}{2} (ہ' جف' فہ + ۲ ہ' ک جف' فہ + ک جف' فہ) \frac{جف' لا}{جف' ما} + \dots (۶)$$

جہاں بائیں جانب اختصار کے لئے فہ (لا' + ما) کی بجائے صرف فہ لکھا گیا ہے۔ اس سے بھی زیادہ مختصر شکل یہ ہے

$$فہ (لا + ہ' + ک) = فہ (لا' + ما) + (ہ' فہ + ک فہ) \frac{جف' لا}{جف' ما}$$

$$+ \frac{1}{2} (ہ' فہ + ۲ ہ' ک فہ + ک فہ) \frac{جف' لا}{جف' ما} + \dots (۷)$$

نیز اگر متبوع متغیروں لا اور ما کا کوئی تفاعل ہو اور قطعہ ۵ کے مطابق متغیروں میں مف' لا' مف' ما کے اضافہ کی وجہ سے ۶ میں مف' ع کا اضافہ ہو تو ضابطہ (۷) ذیل کے معادل ہے

$$مف' ع = جف' ع \frac{جف' لا}{جف' ما} + جف' ع \frac{جف' ع}{جف' ما}$$

$$+ \frac{1}{2} [جف' ع (مف' لا) + ۲ جف' ع \frac{جف' ع}{جف' لا} + مف' لا مف' ما + جف' ع \frac{جف' ع}{جف' ما} (مف' ما)] + \dots (۸)$$

اس امر پر توجہ ڈالنا مناسب ہو گا کہ (۴) کے ثبوت میں

$$فہ (لا' + ب) = فہ (لا' + ب' + ما) \dots (۹)$$

کے فرض کرنے کی ضرورت نہیں ہوئی۔ اگر ہم نے (۱) کے پھیلاؤ کو ہ' کی بجائے پہلے ک کی قوتوں میں

بدل دیاں صورتوں میں بھی تین یا زیادہ متبوع متغیر شریک ہوں اس نوع کی توسیع بالکل ممکن ہے

پھیلا یا ہوتا تو (۴) کے مائل نتیجہ حاصل ہوتا لیکن اس میں فہا (۱) ب) کی بجائے فہا (۱) ب) نمودار ہوتا۔ ان دو شکلوں کے مقابلہ سے دفعہ ۱۹۴ کے مسئلہ کا ایک مختلف ثبوت حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۹۵۔ پھیلاؤ میں عام رقم :- پھیلاؤ (۷) میں عام رقم دریافت کرنے کے لئے ایک مختلف طریقہ ذیل میں درج ہے۔

فرض کہ $ھ + ع + ا + گ = ہ + د + ا$
 فارادیت = $فہا (۱) ب + ھ + ا + گ = فہا (۱) ب + ھ + ا + گ + ع + ا + د$ (۱)
 اس کویت کا تقابل فرض کر کے میکلورن کے مسئلہ سے پھیلا یا جاسکتا ہے اور اسلی عام رقم ہوگی

ان $\frac{فہا (۱) ب}{ان} (۰) \dots \dots (۲)$

ابا اگر تھوڑی دیر کے لئے ہم $ھ + ع + ا + گ = ع + ا + د + ہ + د + ا$ فرض کریں تو

$$\frac{فہا (۱) ب}{جف ا} = \frac{جف فہا جف ع}{جف فہا جف ا} = \frac{جف فہا جف ع}{جف ا}$$

$$\frac{جف فہا جف ع}{جف ا} = \frac{جف فہا جف و}{جف ا} = \frac{جف فہا جف و}{جف ا}$$

جس میں فہا (۷) کی بجائے صرف فہا لکھا گیا ہے۔

$$\frac{جف فہا جف ا}{جف ا} = \frac{جف فہا جف ع}{جف ا} + \frac{جف فہا جف و}{جف ا}$$

$$\frac{جف فہا جف ا}{جف ا} = \frac{جف فہا جف و}{جف ا} + \frac{جف فہا جف ا}{جف ا}$$

(۳)

آخری نتیجہ صریحاً اور و کافعال ہے اور اوپر کی دلائل کے مکرر استعمال سے

$$\text{فأ}^{(ت)} = \left(\text{ع} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہ} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \left(\text{ع} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہ} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \text{فما}^{(ع'و)}$$

$$= \left(\text{ع} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہ} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \text{فما}^{(ع'و)} \dots (۵)$$

$$\text{اور عموماً فأ}^{(ن)} = \left(\text{ع} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہ} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \text{فما}^{(ع'و)} \dots (۶)$$

$$\text{جہاں کہ عامل (ع} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہ} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}) \text{ کو عاملات } \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$$

اور $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ کی خاصیت مبادل کی وجہ سے مسئلہ ثنائی سے پھیلا یا جاسکتا

ہے۔ چونکہ ت صرف مرکبات لا + عادت اور ما + بہات میں نمودار ہوتا ہے اس لئے ظاہر ہے کہ (۶) میں بائیں جانب کے تفرقوں کے عمل سے پہلے یا بعد ت = رکھنے سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔ اس لئے پھیلاؤ میں عام رقم ہوگی

$$\frac{\text{ت}}{\text{ن}} \text{ فأ}^{(ن)} = \left(\frac{\text{ت}}{\text{ن}} \left(\text{ع} \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{بہ} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \right) \text{فما}^{(لا'ما)}$$

$$= \frac{۱}{\text{ن}} \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \right) \text{فما}^{(لا'ما)}$$

$$= \frac{۱}{\text{ن}} \left[\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \text{فما}^{(ن-۱)} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \text{فما}^{(ن-۲)} \right]$$

$$+ \frac{\text{ن} (ن-۱)}{۲ \times ۱} \text{فما}^{(ن-۲)} + \dots + \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \text{فما}^{(۲)} + \dots + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \text{فما}^{(۱)} \dots (۷)$$

یہاں فما (لا'ما) کی بجائے فما لکھا گیا ہے۔
مثال :- ثابت کرو کہ اگر فما (لا'ما) متغیر لا'ما کا درجہ م کا متجانس

تفاعل ہے تو لا فہا + ما فہا = م فہا (۸)

اور لا فہا + لا ما فہا + ما فہا = م (م-۱) فہا (۹)

درجہ م کے متجانس تفاعل کی عام تعریف یہ ہے کہ اگر لا اور ما کو کسی نسبت مہا میں بلا جائے تو تفاعل مہا کی نسبت میں بدل جائے۔ ہے۔

یعنی فہا (لا مہا + ما مہا) = مہا فہا (لا، ما) (۱۰)

اس مساوات میں مہا = ۱ + ت درج کرو۔ اب نتیجہ (۸) سے

فہا (لا + لا ت + ما + ما ت) = فہا (لا، ما)

+ ت (لا فہا + ما فہا) + $\frac{1}{2}$ ت (لا فہا + لا ما فہا + ما فہا + ما ما فہا) +

اور مسئلہ ثنائی سے

(۱+ ت) فہا (لا، ما) = [۱+ ت + $\frac{ت(۱-ت)}{2 \times 1}$ ت + ...] فہا

ان دو نتیجوں میں ت اور ت کے سروں کو مساوی رکھنے سے ضابطہ (۹) اور (۱۰) حاصل ہو سکتے ہیں۔

عام طور پر ت کے سروں کو مساوی رکھنے سے اور پھر (۷) استعمال کرتے سے حاصل ہوتا ہے

لا جف فہا + ن لا جف فہا + $\frac{ن(ن-۱)}{2 \times 1}$ لا جف فہا

جف فہا + $\frac{جف لا جف فہا}{2 \times 1}$ + = م (م-۱) (۱-م) + (۲-م) ... (م-ن) (۱+ن) فہا (۱۱)

یہ دو متبوع متغیروں کی صورت میں ”متجانس تفاعلوں کا سلسلہ“ ہے۔ تین یا زیادہ متبوع متغیروں کی صورت میں اسکی توسیع بالکل عیاں ہے۔

۱۹۶۔ دو متغیر و یک تفاعل کی قیل اور اہم قیمتیں اور انکی ہندسی تعبیر۔

مسئلہ ٹکری کی توسیع شدہ شکل کی مدد سے ہم دفعہ ۵۳ کے مطابق دو مقبوع تغیر لا، ما کے تفاعل ع کی اعظم اور اقل قیمتوں کی بحث کی توسیع کر سکتے ہیں۔ دفعہ ۱۹۴ (۸) سے ظاہر ہے کہ مف لا، مف ما کی مطلق قیمت کو مسلسل کم کیا جائے لیکن انکی نسبت کو مستقل رکھا جائے تو انتہائیں مف ع کی علامت وہی ہے جو ذیل کی ہے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{ مف لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \text{ مف ما} \dots \dots \dots (۱)$$

لیکن اگر $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ دونوں صفر ہیں تو (۱) کی علامت مف لا اور مف ما کی علامت بدلنے سے بدل جاتی ہے۔ پس چند تغیر کے لئے مف ع مثبت ہوگا اور باقی کے لئے منفی۔ بالفاظ دیگر ع کی اعظم یا اقل قیمت صرف اس وقت ہوگی جبکہ ایکسا تھے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = ۰ \text{ اور } \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

اب فرض کرو کہ شرط (۲) پوری ہوتی ہے تو

$$\text{مف ع} = \frac{۱}{۳} \left[\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} (\text{مف لا}) + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} (\text{مف ما}) \right]$$

$$+ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}^۲} (\text{مف ما})^۲ + \dots \dots \dots (۳)$$

اگر مف لا اور مف ما کافی چھوٹے ہیں تو مف ع کی علامت (۳) میں ۵۰۹ درج شدہ رقوم پر ہی منحصر ہوگی اور اعلیٰ ترین درجہ کی رقوم کا کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

نیز دفعہ ۱۹۴ کی تحقیقات میں فرض کر لیا گیا ہے کہ دونوں مشتق مسلسل ہیں اور اسلئے محدود ہیں۔ یعنی ہم شروع ہی سے دفعہ ۵۱ میں غور کروہ صورت کی مشابہ دو ابعادی صورت کو خارج کر دیتے ہیں۔

اب علم الجبر اسے معلوم ہے کہ تینوں درجہ دوم کے تفاعل

(۴) $\frac{ا\text{طا} + ۲\text{ھطا} + ۲\text{حضا} + ۲\text{جضا}}$ کی علامت نا تغیر پذیر ہے صرف اگر

(۵) $\frac{ا\text{ح} < ۲\text{ھ}}$ اور اس صورت میں جلد کی علامت $\frac{ا\text{یا} < ۲\text{ح}}$ کی علامت ہے۔

اس سے اخذ ہو سکتا ہے کہ جب شرط (۲) پوری ہو تو $\frac{ا\text{مف}}{ا\text{لا}}$ اور $\frac{ا\text{مف}}{ا\text{ما}}$ کی کسی قیمتوں کے لئے جو ایک احاطہ کے باہر نہ ہوں مف ع کی علامت ایک ہی رہے گی بشرطیکہ

(۶) $\frac{جف\text{ع}}{جف\text{لا}} < \frac{جف\text{ع}}{جف\text{ما}}$ (جف لا جف ما)

اور اس صورت میں مف ع کی علامت وہی ہوگی جو $\frac{جف\text{ع}}{جف\text{لا}}$ یا $\frac{جف\text{ع}}{جف\text{ما}}$

کی ہے۔ اور ع کی اعظم یا اقل قیمت $\frac{جف\text{ع}}{جف\text{لا}}$ کے منفی یا مثبت ہونے پر منحصر ہوگی۔

اگر $\frac{جف\text{ع}}{جف\text{لا}} > \frac{جف\text{ع}}{جف\text{ما}}$ (جف لا جف ما)

تو کسر $\frac{مف\text{ما}}{مف\text{لا}}$ کی چند قیمتوں کے لئے ع کا اضافہ مثبت ہوگا اور چند کے لئے منفی۔ اس لئے ع کی قیمت اگرچہ دفعہ ۵ کے مطابق مقیم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔

اگر $\frac{جف\text{ع}}{جف\text{لا}} = \frac{جف\text{ع}}{جف\text{ما}}$ (جف لا جف ما)

تو (۳) کی بائیں جانب کی قیمتیں مف لا اور مف ما میں ایک خطی جملہ کے مربع کے مثبت یا منفی کے مساوی ہیں اور اس کے کسر

مف فَا کی ایک خاص قیمت کے لئے یہ صفر ہوگی۔ اب چونکہ مف ع

تیسرے رتبہ کی مقدار ہے اس لئے عموماً اعظم یا اقل قیمت نہیں ہوگی لیکن
اس سوال کا قطعی فیصلہ پھیلاؤ کی فرید رقموں پر غور کر کے بغیر نہیں کیا جاسکتا۔

اگر دوسرے رتبہ کے جزوی مشتق جف ا ع ، جف ا ع ، جف ا ع
جف ا ع ، جف ا ع ، جف ا ع ، جف ا ع ، جف ا ع ، جف ا ع

سب صفر ہوں تو اس صورت میں بھی یہ نتیجہ نکلتا ہے۔
مذکورہ بالا تحقیقات کی ہندسی تعبیر بہت دلچسپ ہے۔ اگر دفعہ
ہم ۳ کے مطابق جی سطح کا عمودی معین ہو اور لا ا م ا افقی مستوی میں
مستطیلی محدود ہوں تو اعظم یا اقل ہندی والے نقطہ کے لئے یہی شرط ہے

جف ا ع = ۰ اور جف ا ع = ۰ (۹)

چونکہ ان مساواتوں سے لازم ہو جاتا ہے کہ مف ا اضافوں
مف ا اور مف فَا میں دوسرے رتبہ کی مقدار ہے اس لئے نتیجہ نکلتا
ہے کہ زیر غور نقطہ ن پر ہر عمودی تراش کا عماسی خط افقی ہو گا یعنی عماسی
مستوی افقی ہوگا۔

اس کے بعد ہم غور کرتا ہے کہ آیا سطح نقطہ ن کے عماسی مستوی ۵۱
کو کاٹتی ہے یا نہیں۔ اگر کوئی ایسا خط تقاطع ہے تو اس پر مف ا = ۰
اور اگر (۳) میں مف فَا = م مف لا درج کریں اور انتہا میں مف لا
کو صفر کر دیں تو نقطہ ن پر ہمیں تقاطع کے عماسی خطوط کی قیمتیں ذیل سے
حاصل ہوتی ہیں

جف ا ع + ۲ جف لا جف فَا + جف ا ع = ۰ (۱۰)

۴ میں اس دو درجی مساوات کی اصلیں خیالی ہوں گی اگر

$$(ii) \dots\dots\dots \left(\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف}^2 \text{لا جف}^2 \text{ما}} \right) < \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف}^2 \text{لا}} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف}^2 \text{ما}}$$

اس صورت میں ن کی عین قربت میں زیر غور سطح مناسی مستوی کے صفر (Contour-line) ایکسا ٹرنٹ واقع ہوگی اور ناسیر کا ہم ارتفاعی خط (Contour-line) صفر ایکسا نقطہ میں تنویل ہو جاتا ہے۔ اس لئے نقطہ ن پر لہندی

کی اعظم قیمت یا اقل قیمت کا ہونا $\frac{\text{جفا فی}}{\text{جفا لا}}$ اور $\frac{\text{جفا فی}}{\text{جفا لا}}$ کے منفی

یاسببیت ہونے پر منحصر ہے یعنی دفعہ ۱ کے مطابق اعظم قیمت ہوگی اگر
نسبتی می لا اور می ما کے متوازی عمودی تراشیں اور ہر کی طرف
معدب ہیں اور اعلی قیمت اگر تراشیں مقعر ہیں۔ اگر لا اور ما محوروں کو ان کے
مستویوں میں عمما یا جائے تو اخذ ہوتا ہے کہ اس صورت میں ذرا میں سے
گزرے والی ہر عمودی تراش اور ہر کی طرف بالترتیب معدب یا مقعر ہوں۔

لیکن اگر $\frac{\text{جف ہی جف ہی}}{\text{جف لا جف لا}} > \left(\frac{\text{جف ہی}}{\text{جف لا جف لا}} \right)$ (۱۲)

تساوات ذرا کی اصلیں حقیقی اور جدا گانہ ہیں۔ انم ارتفاعی خط پر نقطہ ن عقدہ ہے اور اسکی دو شاخیں سطح کو دو حصوں میں بانٹتی ہیں سطح کا ایک حصہ مماسی مستوی کے اوپر واقع ہوگا اور ایک حصہ نیچے۔

$$\frac{\text{جفتی}^1}{\text{جفتی}^2} = \frac{\text{جفتی}^1}{\text{جفتی}^2} = \frac{\text{جفتی}^1}{\text{جفتی}^2} \dots \dots (13)$$

تو مساوات (۱۰) کی اصلیں حقیقی اور مساوی ہیں۔ ہم ارتفاعی خط پر نقطہ
نہ عمود آخری نقطہ ہے اور اس سوال کا جواب کہ اس صورت میں
کی بلندی اعظم ہے یا اقل، بغیر مزید تحقیق کے نہیں دیا جاسکتا۔

مثال ۱۱ :- فرض کرو کہ $u = 3x^2 - 2x + 1$ و $v = x^2 + 2x + 3$ (۱۲)

اس سے جفی = $\frac{3}{(1-1)} \times$ جفی = $\frac{3}{0}$ (۱۵)

اور $\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}} = ۶ (۱ - لا) = \frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ ، جف^۲ لا = $\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ ، جف^۲ لا = $\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ ۔ (۱۶)

شرط (۹) پوری ہوتی ہیں جبکہ لا = ۰، ما = ۰، یا لا = ۲، ما = ۰، اصلوں کا پہلا جوڑا اتساوات (۱۱) کو پورا کرتا ہے اور چونکہ $\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ منفی ہے اس لئے اس نقطہ پر ہی کی اعظم قیمت ہے۔ اصلوں کا دوسرا جوڑا اتساوات (۱۲) کو پورا کرتا ہے اس لئے ہی کی اعظم یا اقل قیمت نہیں ہے۔ اس مثال کے ہم ارتقاعی خطوط جلد دوم صفحہ ۳۹۲ شکل ۶۹ میں دکھائے گئے ہیں۔

سوال ۲:۔ فرض کرو کہ $۲ = (لا + ما) - ۲ (لا + ما) + ج$ ۔۔۔۔۔ (۱۷)

$\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}} = ۴ (لا + ما - لا) = \frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ ، جف^۲ لا = $\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ ، جف^۲ لا = $\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ ۔ (۱۸)

$\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}} = ۴ (۳ لا + ما - لا) = \frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ ، جف^۲ لا = $\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ ، جف^۲ لا = $\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ ۔ (۱۹)

۵۱۱ اس صورت میں مساوات (۹) کی حقیقی حل یہ ہیں لا = ۰، ما = ۰۔ اور لا = ۰، ما = ۰۔ اصلوں کا پہلا جوڑا رشتہ (۱۲) کو پورا کرتا ہے اور اس لئے ہی کی اعظم یا اقل قیمت اس نقطہ پر نہیں ہے۔ اصلوں کا دوسرا جوڑا لا = ۰، ما = ۰۔ شرط (۱۱) کو پورا کرتا ہے اور چونکہ ان قیمتوں کے لئے $\frac{\text{جف}^2 \text{ لا}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$ مثبت ہے اس لئے ہی کی اقل قیمت ہوگی۔ سطح (۱۷) کے ہم ارتقاعی خطوط جلد دوم صفحہ ۴۰۶ کی شکل ۱۰۶ میں دکھائے گئے ہیں سطح میں دو شاخیں خلا ہیں اور ان کے درمیان ایک فرسٹا ہے اگر مساوات (۱۷) کی بائیں جانب کی علامت بدل دی جائے تو خلا کی بجائے سطح کی دو چوٹیاں چھوٹی اور ان کے درمیان گزر کاہ ہوگی۔

۱۹۷۔ مشروط تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں۔

سوال یہ ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں یعنی مقیم قیمتیں اسے تفاعل کی دریافت کیجائیں جو ن متغیروں کا تفاعل ہو لیکن اس کے تمام متغیر غیر تابع نہ ہوں بلکہ ہم معلومہ رشتوں سے وابستہ ہوں (ن < م) اقل اور اعظم کے امتیاز کرنے کے طریقہ پر اس دفعہ میں غور نہیں کیا جائیگا۔ ان مقیم قیمتوں میں اصولاً م معلومہ رشتوں کی مدد سے تفاعل میں سے ہم متغیروں کو ساقط کر سکتے ہیں اور تب تفاعل صرف (ن-م) متبوع متغیروں کا تفاعل رہ جائے گا لیکن عملی طور پر یہ طریقہ اگر ناممکن نہ بھی ہو تو بھی بہت طویل ہوگا اس مشکل کو حل کرنے کے لئے غیر معین ضرابوں کا طریقہ ابتدا میں نگرانی نے دریافت کیا تھا۔ ان صورتوں میں جبکہ دیا ہوا تفاعل اور معلومہ رشتے متشاکل سے جملے ہیں یہ طریقہ از حد مفید ہے۔

ذیل کی مثالوں سے یہ طریقہ کافی طور پر واضح ہو جائیگا۔

(آ) فرض کر دو کہ ع ایک تفاعل ہے

$$۶ = \text{فما} \text{لا} \text{ما} \text{ہی} \quad (۱)$$

جبکہ لا، ما، ہی رشتہ

$$\text{ف} \text{لا} \text{ما} \text{ہی} = ۰ \quad (۲)$$

سے وابستہ ہیں۔ اس امر سے کہ مف = ۶ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{array}{c} \text{جف فما} \text{مف لا} + \text{جف فما} \text{مف ما} + \text{جف فما} \text{مف ہی} = ۰ \quad (۳) \\ \text{جف لا} \quad \text{جف ما} \quad \text{جف ہی} \end{array}$$

لا انتہا چھوٹے تغیرات مف لا، مف ما، مف ہی سب ایک دوسرے کے غیر تابع نہیں ہیں بلکہ ذیل کے رشتہ سے وابستہ ہیں

$$\begin{array}{c} \text{جف ف} \text{مف لا} + \text{جف ف} \text{مف ما} + \text{جف ف} \text{مف ہی} = ۰ \quad (۴) \\ \text{جف لا} \quad \text{جف ما} \quad \text{جف ہی} \end{array}$$

کیونکہ مف ف = ۰۔

ان نتائج میں سے مف ہی کو ساقط کر سکتے ہیں۔ تب حاصل اسقاط میں مف لا، مف ما کو غیر تابع فرض کر سکتے ہیں اور ان کے سروں کو علیحدہ علیحدہ صفر رکھ سکتے ہیں۔ اس سے زیادہ متشائل طریقہ یہ ہو گا کہ (۳) اور (۴) سے ذیل کی مساوات بنائی جائے

$$\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}} \right) \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) + \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}} \right) \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) = \text{مف لا}$$

$$+ \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}} \right) \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) = \text{مف ہی} \quad (۵)$$

اس وقت تک لہ کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔ لیکن اب ہم فرض کرتے ہیں کہ لہ کی قیمت اس شرط سے دریافت کی جاتی ہے کہ ان محدود فرقوں میں سے ایک کا سر صفر ہو۔ فرض کرو کہ مف ہی کا سر صفر ہے۔ اب چونکہ مف لا اور مف ما میں کوئی لازمی تعلق نہیں ہے اس لئے ان کے سر بھی جدا گانہ صفر ہونگے۔ اس سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{لہ}}{\text{جف فہ}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}$$

$$= \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \quad (۶)$$

ان تین مساواتوں اور مساوات (۲) سے چار ہمزاد مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے چار غیر معلوم مقداریں لا، ما، ہی، لہ دریافت ہو سکتے ہیں۔

$$(۴) \quad \text{فہ} = \text{ع} = \text{لا، ما، ہی} \quad (۷)$$

جبکہ متغیرات ان دو فرقوں سے وابستہ ہیں

$$(۸) \quad \text{فہ} = \text{لا، ما، ہی} \quad (۸)$$

مذکورہ بالا طریقہ پر عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

نیز ع کو ساقط کرنے سے

$$(۱۷) \dots\dots\dots (۱-ج) لا ما = (۱-ج) لا ما \dots\dots\dots (۱۷)$$

$$(۱۸) \dots\dots\dots ع = لا^۱ + ما^۱ + ی^۱ \dots\dots\dots (۱۸)$$

مثال (۲) کی قائم قیمتیں دریافت کرو جبکہ

$$(۱۹) \dots\dots\dots (۱-ج) لا + (۱-ج) ما + (۱-ج) ی = ۱ \text{ اور } (۱-ج) لا + (۱-ج) ما + (۱-ج) ی = ۱$$

یہ سوال مخروطی ناسطیح کی مرکزی مستوی تراش کے صدر محاور دریافت کرنے کا ہے ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$لا = لا (۱-ج) + ما (۱-ج) = لا (۱-ج) + ما (۱-ج) = لا (۱-ج) + ما (۱-ج)$$

$$(۲۰) \dots\dots\dots + ما (۱-ج)$$

انہیں بالترتیب لا، ما، ی سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$(۲۱) \dots\dots\dots ع = لا \dots\dots\dots (۲۱)$$

$$(۲۲) \dots\dots\dots پس لا + ما + ی = \frac{لا}{۱-ج} + \frac{ما}{۱-ج} + \frac{ی}{۱-ج} = \frac{لا + ما + ی}{۱-ج} \dots\dots\dots (۲۲)$$

انہیں بالترتیب ل، م، ن سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$(۲۳) \dots\dots\dots = \frac{لا}{۱-ج} + \frac{ما}{۱-ج} + \frac{ی}{۱-ج} \dots\dots\dots (۲۳)$$

جو ع میں دو درجی مساوات ہے۔ اگر ع اسکی ایک اصل ہو تو لا: ما: ی نسبتوں کی حامل قیمتیں (۲۲) سے حاصل ہو سکتی ہیں

$$(۲۴) \dots\dots\dots یعنی لا: ما: ی = \frac{لا}{۱-ج} : \frac{ما}{۱-ج} : \frac{ی}{۱-ج} \dots\dots\dots (۲۴)$$

۱۹۸۔ لفاف :- گذشتہ دفعہ کے طریقہ کے بالکل مثل

طریقہ ایسے منحنی کے لفاف دریافت کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے جس کی مساوات میں ن متبادل ہیں جو (ن-۱) رشتوں سے وابستہ ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ $ف(لا، ما، عا، بیا) = \dots (۱)$
 کالفاظ مطلوب ہے جبکہ عا اور بیا رشتہ $ف(عا، بیا) =$
 سے وابستہ ہیں۔ منحنی (۱) اور اس کے متصل منحنی کے مقام تقاطع پر
 $ف(لا، ما، عا + مف عا، بیا + مف بیا) = ف(لا، ما، عا، بیا) =$

(۳)

یعنی انتہائیں $\frac{جف ف}{جف عا} + \frac{جف ف}{جف بیا} = مف بیا = (۴)$

اب تغیرات مف عا اور مف بیا میں یہ رشتہ ہے ۵۱۲

$\frac{جف ف}{جف عا} + \frac{جف ف}{جف بیا} = مف بیا = \dots (۵)$

اسلئے $(\frac{جف ف}{جف عا} - ل) + (\frac{جف ف}{جف بیا} - ل) = مف بیا$

۔ ل $(\frac{جف ف}{جف عا} + \frac{جف ف}{جف بیا}) = مف بیا = (۶)$

اگر لہا کو ہم اس شرط سے دریافت کریں کہ مف بیا کا سر صفر ہو تو
 ظاہر ہے کہ مف عا کا سر بھی صفر ہوگا۔ تب

$\frac{جف ف}{جف عا} - ل = \frac{جف ف}{جف بیا} - ل = \frac{جف ف}{جف عا + جف بیا} = (۷)$

انتہائی نقاط تقاطع کے طریق کی مساوات (۱)، (۲)، اور (۷) میں سے
 عا، بیا، لہا ساقط کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال (۱) :- خط $\frac{لا}{عا} + \frac{ما}{بیا} = ۱$ (۸)

کے لفاف کی مساوات دریافت کرو جبکہ

(۹) $صا + بیا = لا$

اس طریقہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{عما} = لا عما، \frac{ما}{بہا} = لا بہا \dots (۱۰)$$

$$\text{اس لئے } لا (عما + بہا) = \frac{لا}{عما} + \frac{ما}{بہا} = ۱$$

$$\text{یعنی } لا = \frac{۱}{عما + بہا} = \frac{۱}{لا} \dots (۱۱)$$

پس عما = لا، لا = بہا، لا = ما
اس سے حاصل شدہ عما اور بہا کی قیمتیں (۹) میں درج کرنے سے
لا + ما = لا (دیکھو دفعہ ۴۵ کی مثال ۲)۔

مثال ۲:۔ عما + لا + بہا = ۱ (۱۳)۔
کالاف دریافت کرو جبکہ

عما بہا + عما + جب بہا + ج = ۰ (۱۴)۔
ہمیں ان مساواتوں اور ذیل کی دو مساواتوں میں سے عما، بہا اور لا
کو ساقط کرنا ہے

لا = لا (بہا + لا)، ما = لا (عما + جب) (۱۵)۔
لا کو ساقط کرنے سے عما - لا = بہا، ما = لا - جب لا
۱۳ کے ساتھ شریک کرنے سے

عما - لا = ۱ (لا - جب لا + لا)، بہا = ۱ (جب لا - لا + لا) (۱۶)۔
عما اور بہا کی ان قیمتوں کو (۱۳) میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے
(جب لا - لا + لا + ج لا + لا + لا + لا) = ۱ + ۱ = ۰ (۱۷)۔
جو مطلوب لغات کی مساوات ہے۔

۱۹۹۔ جزوی تفرق کے اطلاقات:۔ ہندسی اور ۵۵

طبیعی سوالات میں جزوی تفرق کے متعدد مسئلے اکثر پیش آتے ہیں۔

بطور قاعدہ کے کہا جاسکتا ہے کہ جیسے یہ پیدا ہوں انکے حل پر شور کرنا مفید ہوگا۔ اب ہم ایک دو اسان صورتوں پر غور کریں گے جن سے پیدا ایسی باتیں واضح ہو جائیں گی جنکو ہمیشہ مد نظر رکھنا چاہیے۔ (آخر میں کرو کہ)

جہاں و متبوع متعبر لا، ما کا تفاعل ہے۔ اور فرض کرو کہ غ کے متواتر جزوی مشتقات بمطابق لا، ما کے مطلوب ہیں۔

$$\text{اب دفعہ ۳۲ سے } \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{و}}} \quad (۱)$$

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} = \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} \quad (۲)$$

$$\text{نیز } \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \left[\frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right] \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} + \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \quad (۳)$$

$$= \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \left(\frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} + \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right)$$

(۳)

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا جف}^{\text{ما}}}} = \left[\frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} \right] \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} + \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \quad (۴)$$

$$= \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \left(\frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} + \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right)$$

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} = \left[\frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} \right] \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} + \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \quad (۵)$$

$$= \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \left(\frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} + \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \right)$$

(۲) فرض کرو کہ $\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \frac{\text{فما}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}}$ اور علیٰ ہذا۔

جہاں لا اور ما متبوع متعینیت کے دے ہوئے تفاعل ہیں۔
 اور ع کے مشتقات بلحاظ ت کے دریافت طلب ہیں۔
 اب دفعہ ۵۹ (۱) سے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف فم لا}}{\text{جف لا فرت}} + \frac{\text{جف فم فر لا}}{\text{جف ما فرت}} \dots (۷)$$

دوبارہ تفریق کرنے سے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف فم لا}}{\text{جف لا فرت}} + \frac{\text{جف فم فر لا}}{\text{جف ما فرت}} + \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف فم لا}}{\text{جف لا فرت}} \right) + \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف فم فر لا}}{\text{جف ما فرت}} \right) \dots (۸)$$

اب مذکورہ مسئلہ سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف فم لا}}{\text{جف لا فرت}} \right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \left(\frac{\text{جف فم لا}}{\text{جف لا فرت}} \right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \left(\frac{\text{جف فم لا}}{\text{جف لا فرت}} \right) \dots$$

اور

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف فم فر لا}}{\text{جف ما فرت}} \right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \left(\frac{\text{جف فم فر لا}}{\text{جف ما فرت}} \right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \left(\frac{\text{جف فم فر لا}}{\text{جف ما فرت}} \right) +$$

اب (۸) میں درج کردہ کے دفعہ ۱۹۳ کے مطابق قانون متبادل کے استعمال سے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف فم لا}}{\text{جف لا فرت}} + \frac{\text{جف فم فر لا}}{\text{جف ما فرت}} + \frac{\text{جف فم فر لا}}{\text{جف لا فرت}} \left(\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \right) + \frac{\text{جف فم فر لا}}{\text{جف ما فرت}} \left(\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \right) + \dots (۹)$$

اس طریقہ کو جاری رکھا جاسکتا ہے لیکن اس سے زیادہ بڑھنے کی
 شاذ ہی ضرورت پڑتی ہے۔

بعض اوقات حرکیاتی سوال میں محدود واپس سے تبدیل کر کے تفاعل سے
ضرورت پڑتی ہے۔ بطور مثال فرض کرو کہ دو ابعاد میں کارٹیزیائی محدودوں
سے قطبی محدودوں میں تبدیل کرنا ہے یعنی

$$\text{لا} = \text{رجم طما} \quad \text{ما} = \text{رجب طما}$$

مذکورہ بالا طریقہ سے $\frac{\text{فما}}{\text{فرت}}$ اور $\frac{\text{فما}}{\text{فرت}}$ کو ر اور طما کے

مشتقات (لحاظات کے) کی رقموں میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

مثال :- فرض کرو کہ ی = فما (لا - ج دت) + خما (لا + ج دت) ... (۱۰)
جہاں متغیرات لا اور دت غیر تابع ہیں۔

اختصار کیلئے لا - ج دت = ۶ اور لا + ج دت = ۷ رکھنے سے حاصل
ہوتا ہے

$$\frac{\text{جفٹ ی}}{\text{جفٹ لا}} = \text{فما} (۶) + \text{خما} (۷) = \frac{\text{جفٹ ی}}{\text{جفٹ لا}} = \text{ج فما} (۶) + \text{ج خما} (۷)$$

(۱۱)

$$\text{اور جفٹ لا} = \text{فما} (۶) + \text{خما} (۷) = \frac{\text{جفٹ ی}}{\text{جفٹ لا}} = \text{ج فما} (۶) + \text{ج خما} (۷)$$

(۱۲)

$$\text{اس لئے } \frac{\text{جفٹ ی}}{\text{جفٹ لا}} = \text{ج} \frac{\text{جفٹ ی}}{\text{جفٹ لا}} \quad (۱۳) \dots\dots\dots$$

۲۰۰ - تضمینی تفاعل کا تفرق :- فرض کرو کہ ما متغیر لا

کا تفاعل ہے جو تضمینی طور پر مساوات

سے بیان کیا گیا ہے ما کے متواتر مشتقات لحاظ لا کے دریافت طلب ہے
دفعہ ۵۹ کے مطابق

$$(۲) \dots\dots\dots = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

اگر اسے لحاظ لا کے تفسر کریں تو

$$\text{فر لا} \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) + \text{فر لا} \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right) \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

(۳)

۵۱۶

اب دفعہ ۵۹ سے

$$\text{فر لا} \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right) \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

$$\text{فر لا} \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right) \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

اس لئے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

(۴)

اگر (۲) سے حاصل شدہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت اسمیں درج کر دیں تو

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر لا} \text{ فہ ما} - ۲ \text{ فہ لا ما}}{\text{فر لا} \text{ فہ ما} + \text{فہ لا ما}}$$

(۵)

(۴) کو پھر تفرق کر کے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت درج کرنے سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے اور اسی طرح اعلیٰ رتبہ کے مشتقوں کیلئے ضابطہ (۵) سے ایسے تخمینات کے انحصار کے لئے جملہ حاصل ہو جاتا ہے جنکی مساوات قائم محدودوں میں (۱) سے بیان کی گئی ہو۔

$$\text{یعنی } \frac{1}{5} = \frac{\text{فہا} - \text{فہا}^2 - \text{فہا}^3 + \text{فہا}^4 + \text{فہا}^5}{(\text{فہا}^2 + \text{فہا}^3 + \text{فہا}^4 + \text{فہا}^5 + \text{فہا}^6)} \quad (۶)$$

نقطہ انعطاف کے لئے شرط (۵) کی بائیں جانب کے شمار کنندہ کو صفر رکھتے سے حاصل ہو سکتی ہے۔
یہ ظاہر ہو گا کہ ضابطہ (۴) گزشتہ دفعہ ۱۹۹ کے ضابطہ (۹) میں
فہا = لا اور ع = ۰ رکھنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۔۱۔ متغیر کا بدلنا۔

(۱) ایک متغیر کے تفاعل کی صورت میں تابع اور غیر تابع متغیروں کو باہم بدل دینا مطلوب ہے۔

$$\text{مثلاً ۳۳ سے } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} \right)^{-1} \quad (۱)$$

$$\text{س لئے } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} \right)^{-1} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad (۲)$$

$$\text{مثلاً ۳۳ سے } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} \right)^{-1} \quad (۲)$$

ایسی طرح اعلیٰ اشتقاق کے لئے۔

(۳) فرض کرو کہ ۶ = فہا (طا، عا) (۳)
فہا، عا متبوع متغیر لا اور ما کے معلومہ تفاعل ہیں اور ع کے دوسرے
تغیر کے جزوی مشتقات بجائے لا اور ما دریافت طلب ہیں۔

$$\text{ب } \frac{\text{جفلا}}{\text{جفلا}} = \frac{\text{جفلا}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{جفلا}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{جفلا}}{\text{جفلا}} \quad (۴)$$

$$\text{جفلا} = \frac{\text{جفلا}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{جفلا}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{جفلا}}{\text{جفلا}} \quad (۴)$$

اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{aligned} & \text{جفأع} = \frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} \\ & + \left(\frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} + \frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} + \frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} + \dots \right) \\ & = \frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} + \frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} + \frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} + \dots \\ & = \frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} + \frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} + \frac{\text{جفأع}}{\text{جفأع}} + \dots \end{aligned}$$

مثال ۱:- ایک ذرہ رفتار کے معقب کے متناسب مزاحمت کے زیر عمل حرکت کر رہا ہے اس کی مساوات حرکت ہے

$$\text{فر}^2 = \text{گ} \left(\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \right) \quad (۸)$$

اگر ترقیم کے فرق کو مد نظر رکھا جائے تو (۲) سے فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\text{فر}^2 = \text{گ} + \text{ک} \quad (۹)$$

$$\text{اس کے لئے} \quad \text{ت} = \frac{1}{\text{ک}} \text{ک} \text{لا} + \text{لا} + \text{کب} \quad (۱۰)$$

$$\text{مثال ۲:-} \quad \text{جملہ} \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} \quad (۱۱)$$

کو قائم محدودوں سے قطبی محدودوں میں تبدیل کرو۔

لا = رجم طما اور ما = رجب طما رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} = \text{رجم طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \text{رجب طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}}$$

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} = \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} = \text{رجم طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \text{رجب طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \text{رجم طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} - \text{رجب طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}}$$

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} = \text{رجب طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \text{رجم طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} \quad (۱۲)$$

$$\text{اس کے لئے} \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \text{رجم طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} - \text{رجب طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}}$$

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} = \text{رجب طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \text{رجم طما} \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} \quad (۱۵)$$

اس میں مندرجہ تمام عاملوں کا عمل کرنا ضروری نہیں ہے کیونکہ جملہ (۱۱) کے

حاصل جمع میں بہت سی قسمیں کٹ جائیں گی۔ باقی رقموں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}} \text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}} \text{جف}^{\text{ع}}} = \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}}} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}}} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}}} + \dots (۱۲)$$

امثلہ نمبر ۶۴

(جزوی تفرق اور ٹھیک تفرق)

(۱) اگر $\text{ع} = \frac{\text{لا} \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$ تو تصبیق کرو کہ $\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}}} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}}} = \text{ع}$

اور $\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}}} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}}} = \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}}} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} + \text{جف}^{\text{ع}}} = \text{ع}$

(۲) اگر $\text{ی} = \frac{\text{لا}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}}}{\text{لا}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}} + \text{لا}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}}} - \frac{\text{ما}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}}}{\text{ما}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}} + \text{ما}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^{\text{ی}}}{\text{جف}^{\text{ی}} + \text{جف}^{\text{ی}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}}}{\text{لا}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}} + \text{لا}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}}} - \frac{\text{ما}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}}}{\text{ما}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}} + \text{ما}^{\text{ع}} \text{سن}^{\text{ع}}}$

(۳) اگر $\text{ی} = \text{ف} (\text{لا} + \text{ما})$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^{\text{ی}}}{\text{جف}^{\text{ی}} + \text{جف}^{\text{ی}}} = \frac{\text{جف}^{\text{ی}}}{\text{جف}^{\text{ی}} + \text{جف}^{\text{ی}}}$

نیز اسکا عکس ثابت کرو یعنی اگر $\frac{\text{جف}^{\text{ی}}}{\text{جف}^{\text{ی}} + \text{جف}^{\text{ی}}} = \frac{\text{جف}^{\text{ی}}}{\text{جف}^{\text{ی}} + \text{جف}^{\text{ی}}}$ تو یہ مذکور بالا مشکل کا حل ہوگا

(۴) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{جف}^{\text{ف}}}{\text{جف}^{\text{ف}} + \text{جف}^{\text{ف}}} + \frac{\text{جف}^{\text{ف}}}{\text{جف}^{\text{ف}} + \text{جف}^{\text{ف}}} + \frac{\text{جف}^{\text{ف}}}{\text{جف}^{\text{ف}} + \text{جف}^{\text{ف}}} = \text{پوری ہوتی ہے}$

اگر $\text{ف} = \left(\frac{\text{ر}}{\text{ر}} + \frac{\text{ب}}{\text{ر}} \right) (\text{جمن} - \text{طہا})$

(۵) ثابت کرو کہ $\text{ف} (\text{لا} + \text{ما}) = \left(\frac{\text{لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \right) (\text{لا} + \text{ما}) = \text{ف} (\text{لا} + \text{ما})$

کے نمونے کی مساوات $(\text{لا} + \text{ما})$ سے تقسیم کرنے سے ٹھیک مساوات بن جاتی ہے

(۶) ثابت کرو کہ جنس ما فر لا۔ جب لا فر ما ٹھیک تفرقی ہے تفاعل
جنس ما۔ جنم لا۔
ع کا نیز ع دریافت کرو۔

(۷) اگر جنس ما + جنس ما = جنس ما۔ تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل جنس
وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس لا}} = \frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس ما}} + \frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس لا}} = \frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس لا}}$$

اور

(۸) اگر جنس ما + جنس ما = جنس ما۔
تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل جنس وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس لا}} = \frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس ما}} + \frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس لا}} = \frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس لا}}$$

اور تفاعل جنس بھی اسی جزوی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے جس کو جنس
پورا کرتا ہے۔

(۹) اگر جنس ما + جنس ما = جنس ما۔
تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل جنس ایسا وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس لا}} = \frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس ما}} + \frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس لا}} = \frac{\text{جنس ما}}{\text{جنس لا}}$$

امثلہ ۶۵ (اعظم اور اصل قیمتیں)

- (۱) - ثابت کرو کہ سطح $را$ ہی = $لا$ - $ما$ کا معین (ہی) نقطہ $لا = .$ $ما =$ پر قائم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔
اس سطح کے ہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔
- (۲) دفعہ ۱۹۶ کے ضابطہ سے ثابت کرو کہ کم از کم سطح والا تنواری السطوح جبکہ حجم دیا ہوا ہو ایک کعب ہوتا ہے۔
- (۳) اگر $(ا، ب، ج)$ ایک مثلث کے راس ہوں اور $ن$ کوئی ترین نقطہ ہو تو $ن$ $ا، ب، ج$ کا حاصل جمع اقل ہوگا جب تک $ن$ $(ا، ب، ج)$ کے وسط مرکز پر مطبق ہوگا۔
- (۴) سوال (۳) کی ترقیم - $ا، ب، ج$ $ا، ب، ج$ پر واقع تین ذروں کی قیمت اقل ہوگی جبکہ $ن$ نقاط $(ا، ب، ج)$ پر واقع تین ذروں کے مرکز قیمت پر مطبق ہوگا۔
- (۵) بتاؤ کہ $لا$ $ما$ کی کس قیمت کے لئے سطح $ہی = لا + ما - ۳$ $لا$ $ما$ کا معین قائم ہوگا۔
- [قیمتیں $(ا، ب، ج)$ اور $(ا، ب، ج)$ ہیں لیکن دوسری قیمت کے لئے $ہی$ اعظم یا اقل نہیں ہے]
- (۶) ثابت کرو کہ سطح $ج$ $ہی = لا$ - $ما$ کا معین نقطہ $لا = .$ $ما =$ پر قائم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔ ہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔
- (۷) بتاؤ کہ $لا$ $ما$ کی کن قیمتوں کے لئے تفاعل $لا + ما - ۲$ $لا - ما$ ۲ قائم ہے۔

متبیل ہو جاتی ہے اس مساوات میں

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرطما}^2} + \text{ر}^2 \text{ما} = 0$$

$$(۲) \quad \text{لا}^2 \text{ما} = ۲ \text{ت رکھنے سے مساوات } \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \frac{۱}{\text{لا}} \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{ما} = 0$$

تبدیل ہو جاتی ہے اس مساوات میں

$$\text{ت} \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرت}^2} + \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرت}^2} + \text{ما} = 0$$

$$(۳) \quad \text{اگر } \text{لا}^2 + ۲ \text{لا} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ما} + ۲ \text{گ} + \text{لا} + ۲ \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} = 0$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ ع} - \frac{۳ \text{ق}^2}{\text{ر}} = \frac{(ا ب - ه) \text{ما} + ا ف - گ ه}{(ا ب - ه) \text{لا} + ب گ - ه ف}$$

$$\text{جہاں ع} = \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرلا}^2}, \text{ ق} = \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرلا}^2} \text{ اور ر} = \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرلا}^2}$$

$$(۴) \quad \text{اگر ع} = \text{ف} \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \right) \text{ تو ثابت کرو کہ } \frac{\text{لا جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \frac{\text{ما جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}} = 0$$

$$\text{اور } \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}^2} = \frac{۱}{\text{لا}^2} \{ \text{لا}^2 + \text{ما}^2 \} \text{ ف}^2 \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \right)$$

$$+ ۲ \text{لا} \text{ما} \text{ ف}^2 \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \right)$$

$$(۵) \quad \text{اگر ح} = \text{ف} \left(\frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{\text{لا}} \right) \text{ تو ثابت کرو کہ } \frac{\text{جف}^2 \text{ح}}{\text{جف}^2 \text{لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ح}}{\text{جف}^2 \text{ما}^2} =$$

$$= ۲ \left(\frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{\text{لا}} \right) \text{ ف}^2 + ۲ \left(\frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{\text{لا}} \right) \text{ ف}^2$$

$$(۶) \quad \text{اگر ع} = \text{ف} (ر) \text{ جہاں ر} = \frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{\text{لا}} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ما}^2} = \text{ف}^2 (ر) + \frac{۱}{ر} \text{ ف}^2 (ر)$$

(۷) اگر مال $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2}$ کے لئے علامت لف^۲ استعمال کی جائے تو ثابت کرو کہ

لف^۲ لوگ ر =۔۔۔ جہاں ر = $\sqrt{(\text{لا} - \text{عما})^2 + (\text{ما} - \text{بہا})^2}$

(۸) اگر ع = ف (لا^۲ + ما^۲ + ہی^۲)

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ ہی}^2}$

= $3(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ہی}^2) \text{ ف}^2 (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ہی}^2) + 6 \text{ ف}^2 (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ہی}^2)$

(۹) اگر ع = ف (ر) جہاں ر = $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ہی}^2}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ ہی}^2} = \text{ف}^2 (ر)^2 + \frac{2}{3} \text{ ف}^2 (ر)$

(۱۰) اگر لف^۲ مال $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ ہی}^2}$ کو ظاہر کرے تو ثابت کرو کہ

لف^۲ ر = $\frac{2}{3}$ اور لف^۲ $\frac{1}{3}$ =۔۔۔

جہاں ر = $\sqrt{(\text{لا} - \text{عما})^2 + (\text{ما} - \text{بہا})^2 + (\text{ہی} - \text{جہا})^2}$

(۱۱) اگر لف^۲ کے وہی معنی ہوں جو سوال (۱۰) میں ہیں اور اگر

لف^۲ ع =۔۔۔ لف^۲ او =۔۔۔ لف^۲ ہ =۔۔۔ اور $\frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ع}^2}{\text{جف}^2 \text{ ہی}^2}$

= $\frac{\text{جف}^2 \text{ ہ}^2}{\text{جف}^2 \text{ ہی}^2} +$

تو لف^۲ (لا^۲ + عا^۲ + ما^۲ + ہی^۲) =۔۔۔

(۱۲) اگر ϵ و σ تغیر لا، ϵ ہی کے دوا سے تفاعل ہوں جو مساوات
لف ϵ = . اور لفا ϵ و = کہ پورا کریں اور و تفاعل ϵ و ϵ کا تو ثابت کرو کہ
و کی شکل ϵ + ϵ جب ہوگی۔

(۱۳) اگر لا = ϵ جم طہا ϵ ما = ϵ جب طہا جہاں ر اور طہا متغیر
ت کے تفاعل میں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\epsilon}{\text{فرت}} \text{ جم طہا} + \frac{\epsilon}{\text{فرت}} \text{ جب طہا} = \frac{\epsilon}{\text{فرت}} - \frac{\epsilon}{\text{فرت}} \text{ (فرت)}$$

$$- \frac{\epsilon}{\text{فرت}} \text{ جب طہا} + \frac{\epsilon}{\text{فرت}} \text{ جم طہا} = \frac{\epsilon}{\text{فرت}} - \frac{\epsilon}{\text{فرت}} \text{ (فرت)}$$

$$(۱۴) \text{ اگر } \epsilon = \frac{1}{\text{فما}} (\text{ج ت} - \text{ر}) + \frac{1}{\text{خما}} (\text{ج ت} + \text{ر})$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \frac{\epsilon}{\text{جفت}} = \text{ج} \left(\frac{\epsilon}{\text{جفت}} + \frac{\epsilon}{\text{جفت}} \right)$$

$$(۱۵) \text{ اگر } \epsilon = \text{ت} \text{ فو } \frac{\epsilon}{\text{گت}} \text{ تو ثابت } \frac{\epsilon}{\text{جفت}} = \text{ک} \frac{\epsilon}{\text{جفت}}$$

$$(۱۶) \text{ اگر } \epsilon = \text{ت} \text{ فو } \frac{\epsilon}{\text{گت}} \text{ تو ثابت کرو کہ } \frac{\epsilon}{\text{جفت}} = \text{ک} \left(\frac{\epsilon}{\text{جفت}} \right)$$

$$+ \frac{\epsilon}{\text{جفت}}$$

$$(۱۷) \epsilon = \text{لا} \text{ فما} \left(\frac{\epsilon}{\text{لا}} \right) \text{ تو تصدیق کرو کہ } \frac{\epsilon}{\text{جفت}} + \frac{\epsilon}{\text{جفت}} = \text{ن} \epsilon$$

$$\text{اور } \frac{\epsilon}{\text{جفت}} + \frac{\epsilon}{\text{جفت}} + \frac{\epsilon}{\text{جفت}} = \text{ن} \epsilon - \text{ن} \epsilon$$

$$(۱۸) \text{ اگر } \text{ما} - \text{ن} \epsilon = \text{ف} (\text{لا} - \text{م} \epsilon) \text{ تو ثابت کرو } \frac{\epsilon}{\text{جفت}} + \frac{\epsilon}{\text{جفت}} = \text{ن} \epsilon$$

(۱۹) اگر می-جہ = (لا-عہ) ف (ما-بہ) تو ثابت کرو کہ

$$(لا-عہ) \frac{جف می}{جف لا} + (ما-بہ) \frac{جف می}{جف ما} = می-جہ$$

(۲۰) اگر لا = ج جمن طاجم عا، ما = ج جمن طاجب عا
تو ثابت کرو کہ $\frac{جف عا}{جف طاجم} + \frac{جف عا}{جف طاجب}$

$$= \frac{ج}{۲} (جمن طاجم ۲ عا) \left(\frac{جف عا}{جف لا} + \frac{جف عا}{جف ما} \right)$$

(۲۱) ثابت کرو کہ اگر منحنی فہ (لا، ما) = کے کسی نقطہ پر ایک ساقہ

فہ = ' فہ = تو منحنی کی دو شاخیں (حقیقی یا خیالی) اس نقطہ میں سے
گزرتی ہیں اور ان شاخوں کی سمتیں ذیل کی دو درجی مساوات کے حامل ہوتی ہیں۔

$$فہ لا + ۲ فہ لا ما + فہ ما = ۰$$

پس ثابت کرو کہ نقطہ عقدہ یا قرن یا اکیلا نقطہ ہے بموجب اس کے کہ

$$(فہ لا) < یا = یا > فہ لا ما$$

سہ

S9	S0	S6	S7	S8	S9	S0	S1	S2
S9A9	S0A9	S6A6	S7A7	S8A8	S9A9	S0A9	S1A1	S2A2
S9B9	S0B9	S6B6	S7B7	S8B8	S9B9	S0B9	S1B1	S2B2
S9C9	S0C9	S6C6	S7C7	S8C8	S9C9	S0C9	S1C1	S2C2
S9D9	S0D9	S6D6	S7D7	S8D8	S9D9	S0D9	S1D1	S2D2
S9E9	S0E9	S6E6	S7E7	S8E8	S9E9	S0E9	S1E1	S2E2
S9F9	S0F9	S6F6	S7F7	S8F8	S9F9	S0F9	S1F1	S2F2
S9G9	S0G9	S6G6	S7G7	S8G8	S9G9	S0G9	S1G1	S2G2
S9H9	S0H9	S6H6	S7H7	S8H8	S9H9	S0H9	S1H1	S2H2
S9I9	S0I9	S6I6	S7I7	S8I8	S9I9	S0I9	S1I1	S2I2
S9J9	S0J9	S6J6	S7J7	S8J8	S9J9	S0J9	S1J1	S2J2
S9K9	S0K9	S6K6	S7K7	S8K8	S9K9	S0K9	S1K1	S2K2
S9L9	S0L9	S6L6	S7L7	S8L8	S9L9	S0L9	S1L1	S2L2
S9M9	S0M9	S6M6	S7M7	S8M8	S9M9	S0M9	S1M1	S2M2
S9N9	S0N9	S6N6	S7N7	S8N8	S9N9	S0N9	S1N1	S2N2
S9O9	S0O9	S6O6	S7O7	S8O8	S9O9	S0O9	S1O1	S2O2
S9P9	S0P9	S6P6	S7P7	S8P8	S9P9	S0P9	S1P1	S2P2
S9Q9	S0Q9	S6Q6	S7Q7	S8Q8	S9Q9	S0Q9	S1Q1	S2Q2
S9R9	S0R9	S6R6	S7R7	S8R8	S9R9	S0R9	S1R1	S2R2
S9S9	S0S9	S6S6	S7S7	S8S8	S9S9	S0S9	S1S1	S2S2
S9T9	S0T9	S6T6	S7T7	S8T8	S9T9	S0T9	S1T1	S2T2
S9U9	S0U9	S6U6	S7U7	S8U8	S9U9	S0U9	S1U1	S2U2
S9V9	S0V9	S6V6	S7V7	S8V8	S9V9	S0V9	S1V1	S2V2
S9W9	S0W9	S6W6	S7W7	S8W8	S9W9	S0W9	S1W1	S2W2
S9X9	S0X9	S6X6	S7X7	S8X8	S9X9	S0X9	S1X1	S2X2
S9Y9	S0Y9	S6Y6	S7Y7	S8Y8	S9Y9	S0Y9	S1Y1	S2Y2
S9Z9	S0Z9	S6Z6	S7Z7	S8Z8	S9Z9	S0Z9	S1Z1	S2Z2

ب ۲:- ایک کے وقفوں پر ۱۰ سے ۱۰۰ تک کے طبعی اعداد کے جذرا طرے

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	
۳۳۳۳۳۳۳	۳۳۳۳۳۳۳	۳۳۳۳۳۳۳	۳۳۳۳۳۳۳	۳۳۳۳۳۳۳	۳۳۳۳۳۳۳	۳۳۳۳۳۳۳	۳۳۳۳۳۳۳	۳۳۳۳۳۳۳	۳۳۳۳۳۳۳	۱
۵۵۵۵۵۵۵	۵۵۵۵۵۵۵	۵۵۵۵۵۵۵	۵۵۵۵۵۵۵	۵۵۵۵۵۵۵	۵۵۵۵۵۵۵	۵۵۵۵۵۵۵	۵۵۵۵۵۵۵	۵۵۵۵۵۵۵	۵۵۵۵۵۵۵	۲
۷۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷۷۷۷	۳
۹۹۹۹۹۹۹	۹۹۹۹۹۹۹	۹۹۹۹۹۹۹	۹۹۹۹۹۹۹	۹۹۹۹۹۹۹	۹۹۹۹۹۹۹	۹۹۹۹۹۹۹	۹۹۹۹۹۹۹	۹۹۹۹۹۹۹	۹۹۹۹۹۹۹	۴
۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱۱۱۱	۵
۱۳۱۳۱۳۱	۱۳۱۳۱۳۱	۱۳۱۳۱۳۱	۱۳۱۳۱۳۱	۱۳۱۳۱۳۱	۱۳۱۳۱۳۱	۱۳۱۳۱۳۱	۱۳۱۳۱۳۱	۱۳۱۳۱۳۱	۱۳۱۳۱۳۱	۶
۱۵۱۵۱۵۱	۱۵۱۵۱۵۱	۱۵۱۵۱۵۱	۱۵۱۵۱۵۱	۱۵۱۵۱۵۱	۱۵۱۵۱۵۱	۱۵۱۵۱۵۱	۱۵۱۵۱۵۱	۱۵۱۵۱۵۱	۱۵۱۵۱۵۱	۷
۱۷۱۷۱۷۱	۱۷۱۷۱۷۱	۱۷۱۷۱۷۱	۱۷۱۷۱۷۱	۱۷۱۷۱۷۱	۱۷۱۷۱۷۱	۱۷۱۷۱۷۱	۱۷۱۷۱۷۱	۱۷۱۷۱۷۱	۱۷۱۷۱۷۱	۸
۱۹۱۹۱۹۱	۱۹۱۹۱۹۱	۱۹۱۹۱۹۱	۱۹۱۹۱۹۱	۱۹۱۹۱۹۱	۱۹۱۹۱۹۱	۱۹۱۹۱۹۱	۱۹۱۹۱۹۱	۱۹۱۹۱۹۱	۱۹۱۹۱۹۱	۹

ج:- ۱۰ کے وقفوں پر ۱۰ سے ۱۰۰ تک کے اعداد کے تنکافیات

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	
۵۵۲۶	۵۵۵۶	۵۵۸۸	۵۶۲۵	۵۶۶۷	۵۷۱۴	۵۷۶۹	۵۸۳۳	۵۹۰۹	۵۹۰۰	۱
۵۷۳۵	۵۷۵۷	۵۷۷۰	۵۸۸۵	۵۹۰۰	۵۹۱۶	۵۹۳۵	۵۹۵۵	۵۹۷۶	۵۹۰۰	۲
۵۹۵۶	۵۹۷۳	۵۹۷۰	۶۰۷۸	۶۰۸۶	۶۱۹۳	۶۲۰۳	۶۲۱۳	۶۲۲۳	۶۲۳۳	۳
۶۲۰۶	۶۲۰۸	۶۲۱۲	۶۲۱۷	۶۲۲۳	۶۲۲۶	۶۲۳۳	۶۲۳۸	۶۲۴۴	۶۲۵۰	۴
۶۱۹۹	۶۱۷۶	۶۱۷۵	۶۱۷۹	۶۱۸۲	۶۱۸۵	۶۱۸۹	۶۱۹۲	۶۱۹۶	۶۲۰۰	۵
۶۱۹۵	۶۱۷۷	۶۱۷۹	۶۱۵۲	۶۱۵۳	۶۱۵۶	۶۱۵۹	۶۱۶۱	۶۱۶۴	۶۱۶۷	۶
۶۱۶۷	۶۱۶۸	۶۱۷۰	۶۱۷۲	۶۱۷۳	۶۱۷۵	۶۱۷۷	۶۱۷۹	۶۱۸۱	۶۱۸۳	۷
۶۱۸۲	۶۱۸۳	۶۱۸۵	۶۱۸۶	۶۱۸۸	۶۱۸۹	۶۱۹۰	۶۱۹۲	۶۱۹۳	۶۱۹۵	۸
۶۱۹۶	۶۱۹۷	۶۱۹۸	۶۱۹۹	۶۲۰۰	۶۲۰۱	۶۲۰۲	۶۲۰۳	۶۲۰۴	۶۲۰۵	۹

۵۔ ربع کے بیسویں حصہ کے بقعوں پر تمام زاویوں کی مثلثی نسبتیں

ط ۱۰	جب ط	قم ط	مس ط	م ط	قط ط	جم ط	
۵۰	۰	۰	۰	۰	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰
۵۰.۵	۵۰.۷۸	۱۲۶۷۴۵	۵۰.۷۹	۱۲۶۷۰۶	۱۵۰۰.۳	۵۹۹۷	۵۹۵
۵۱.۰	۵۱.۵۶	۶۵۳۹۲	۵۱.۵۸	۶۵۳۱۳	۱۵۰۱.۲	۵۹۸۸	۵۹۰
۵۱.۵	۵۲.۳۳	۳۶۳۸۳	۵۲.۳۰	۳۶۱۶۵	۱۵۰۲.۸	۵۹۷۲	۵۸۵
۵۲.۰	۵۳.۰۹	۳۶۳۳۶	۵۳.۲۵	۳۶۰۷۸	۱۵۰۵.۱	۵۹۵۱	۵۸۰
۵۲.۵	۵۳.۸۳	۲۶۶۱۳	۵۳.۱۴	۲۶۴۱۳	۱۵۰۸.۲	۵۹۲۳	۵۷۵
۵۳.۰	۵۴.۵۴	۲۶۶۰۳	۵۵.۱۰	۲۶۶۴۳	۱۵۱۲.۲	۵۸۹۱	۵۷۰
۵۳.۵	۵۵.۲۲	۱۵۹۱۳	۵۶.۱۳	۱۵۶۳۲	۱۵۱۷.۳	۵۸۵۳	۵۶۵
۵۴.۰	۵۵.۸۸	۱۵۷۰۱	۵۷.۲۷	۱۵۳۷۶	۱۵۲۳.۶	۵۸۰۹	۵۶۰
۵۴.۵	۵۶.۴۹	۱۵۵۴۰	۵۸.۵۴	۱۵۱۷۱	۱۵۳۱.۵	۵۷۶۰	۵۵۵
۵۵.۰	۵۷.۰۷	۱۵۴۱۴	۵۹.۰۰	۱۵۰۰۰	۱۵۴۱.۴	۵۷۰۷	۵۵۰
	جم ط	قط ط	م ط	مس ط	قم ط	جب ط	ط ۱۰

ع۔ اے کے قفون صفر ۵۵ تک تمام اعداد کے قوت نما اور نمائی تفاعلوں کی قیمتیں

لا	ہو	قولا	جمن لا	جبن لا	مسنر لا
-	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰	-	-
۵۱	۱۵۱۰۵	۵۹۰۵	۱۵۰۰۵	۵۱۰۰	۵۱۰۰
۵۲	۱۵۲۲۱	۵۸۱۹	۱۵۰۲۰	۵۲۰۱	۵۱۹۷
۵۳	۱۵۳۵۰	۵۷۴۱	۱۵۰۴۵	۵۳۰۵	۵۲۹۱
۵۴	۱۵۴۹۲	۵۶۷۰	۱۵۰۸۱	۵۴۱۱	۵۳۸۰
۵۵	۱۵۶۴۹	۵۶۰۷	۱۵۱۲۸	۵۵۲۱	۵۴۷۲
۵۶	۱۵۸۲۲	۵۵۴۹	۱۵۱۸۵	۵۶۳۷	۵۵۳۷
۵۷	۲۵-۱۴	۵۴۹۷	۱۵۲۵۵	۵۷۵۹	۵۶۰۲
۵۸	۲۵۲۲۶	۵۴۴۹	۱۵۳۳۷	۵۸۸۸	۵۷۴۴
۵۹	۲۵۴۶۰	۵۴۰۷	۱۵۴۳۳	۱۵۰۲۷	۵۷۱۶
۱۵۰	۲۵۷۱۸	۵۳۶۸	۱۵۵۴۳	۱۵۱۷۵	۵۷۶۲
۱۵۱	۲۵۰۰۲	۵۳۳۳	۱۵۶۶۹	۱۵۳۳۶	۵۸۰۱
۱۵۲	۲۵۳۲۰	۵۳۰۱	۱۵۸۱۱	۱۵۵۰۹	۵۸۳۴
۱۵۳	۲۵۶۶۹	۵۲۷۳	۱۵۹۷۱	۱۵۶۹۸	۵۸۶۲
۱۵۴	۲۵۰۵۵	۵۲۴۷	۲۵۱۵۱	۱۵۹۰۴	۵۸۸۵
۱۵۵	۲۵۴۸۲	۵۲۲۳	۲۵۳۵۲	۲۵۱۲۹	۵۹۰۵
۱۵۶	۲۵۹۵۳	۵۲۰۲	۲۵۵۷۷	۲۵۳۷۶	۵۹۲۲
۱۵۷	۵۵۴۷۴	۵۱۸۳	۲۵۸۲۸	۲۵۶۴۶	۵۹۳۵
۱۵۸	۶۵۰۵۰	۵۱۶۵	۲۵۱۰۷	۲۵۹۴۲	۵۹۴۷
۱۵۹	۶۵۶۸۶	۵۱۵۰	۲۵۴۱۸	۲۶۲۲۸	۵۹۵۶
۲۵۰	۷۵۳۸۹	۵۱۳۵	۲۵۷۶۲	۲۶۵۲۷	۵۹۶۲
۲۵۱	۸۵۱۶۶	۵۱۲۲	۲۵۱۴۴	۲۶۰۲۲	۵۹۷۰
۲۵۲	۹۵۰۲۵	۵۱۱۱	۲۵۵۶۸	۲۶۴۵۷	۵۹۷۶
۲۵۳	۹۵۹۷۴	۵۱۰۰	۵۵۰۳۷	۲۶۹۳۷	۵۹۸۰
۲۵۴	۱۱۵۰۲۳	۵۰۹۱	۵۵۵۵۷	۵۶۴۶۶	۵۹۸۴
۲۵۵	۱۲۵۱۸۲	۵۰۸۲	۶۵۱۳۲	۶۵۰۵۰	۵۹۸۷

ف۔ لوکارتم بلحاظ اساس قو

۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	
۰	۱۰۹۵	۱۱۸۲	۱۲۷۲	۱۳۳۹	۱۴۰۵	۱۴۷۰	۱۵۳۱	۱۵۸۸	۱۶۴۲	۱
۱	۱۶۹۳	۱۷۴۲	۱۷۸۳	۱۸۲۵	۱۸۶۵	۱۹۱۲	۱۹۵۲	۱۹۹۳	۲۰۶۵	۲
۲	۱۶۰۹	۱۶۱۳	۱۶۱۹	۱۶۲۳	۱۶۲۵	۱۶۲۸	۱۶۳۱	۱۶۳۵	۱۶۳۹	۳
۳	۱۶۳۸	۱۶۴۱	۱۶۴۵	۱۶۴۹	۱۶۵۲	۱۶۵۴	۱۶۵۶	۱۶۵۸	۱۶۶۰	۴
۴	۱۶۶۹	۱۶۷۹	۱۶۸۹	۱۶۹۴	۱۷۰۵	۱۷۱۴	۱۷۲۳	۱۷۳۰	۱۷۳۵	۵
۵	۱۷۴۲	۱۷۵۵	۱۷۶۳	۱۷۷۱	۱۷۸۵	۱۷۹۴	۱۸۰۲	۱۸۱۰	۱۸۱۷	۶
۶	۱۸۲۴	۱۸۳۴	۱۸۴۳	۱۸۵۲	۱۸۶۲	۱۸۷۲	۱۸۸۲	۱۸۹۲	۱۹۰۲	۷
۷	۱۹۱۴	۱۹۲۴	۱۹۳۴	۱۹۴۴	۱۹۵۴	۱۹۶۴	۱۹۷۴	۱۹۸۴	۱۹۹۴	۸
۸	۲۰۰۲	۲۰۱۲	۲۰۲۳	۲۰۳۴	۲۰۴۵	۲۰۵۶	۲۰۶۷	۲۰۷۸	۲۰۸۹	۹
۹	۲۱۰۰	۲۱۱۰	۲۱۲۱	۲۱۳۲	۲۱۴۳	۲۱۵۴	۲۱۶۵	۲۱۷۶	۲۱۸۷	

لوک ۱۰ = ۲۵۳۰۳، لوک ۲۰ = ۶۰۵، لوک ۳۰ = ۹۰۸

فہرست اصطلاحات

صغاری احصا
(حصہ سوم)

A

Amplitude

حیطہ، سمت

Approximation

تقرب

Asymptotes

متقارب

Binomial Theorem

B

مسئلہ ثنائی

Charge

C

بار

Circuit

دور

Commutative property

خاصیت مبادلہ

Complementary function

متمم تفاعل

Complete solution

کامل یا پورا حل

Deflection

D

انصراف

Degree

درجہ

Differential equation

تفریق مساوات

Differentiation

تفرق

Double limit		دو بهری انتها
Dynamics		حرکیات، علم حرکت
Electromotive force	E	قوت محرکه برق
Envelope		انفاف
Epoch		آن
Equilibrium		توازن
Equipotential		هم قوه
Essentially convergent		لازم استند
Evolute		برخچه
Exact equation		طبیقت مساوات
Expansion	F	پھیلاؤ
Forced Oscillation		قسری ارتعاش
Harmonic	H	موسیقی
Homogeneous equation		متجانس مساوات
Induction	I	امالہ
Integrating factor		مکمل جزو ضربی
Integration		یکمکمل
Involute		در پچھ
Maximum	M	اعظم
Minimum		اقل
Multiple		ضعفی
Normal mode	N	طبیعی کیفیت
Operator (D)	O	عامل (عف)
Order		رتبہ
Orthogonal trajectories		قائم خطوطاری

Partial	P	جزئی
Particular Integral		خاص تکمله
Particular solution		خاص حل
Pendulum		رقاص
Period		دور
Phase		بسیت
Point of inflexion		نقطه عطف
Pontential		قوه
Potential energy		توانائی بالقوه
Power series		قوتی سلسله
Primitive		ابتدائی
Projection		ظل
Rectilinear motion	R	مستقیم حرکت
Repulsion		اندفاع
Resistance		مزاومت
Self-induction	S	خود اامال
Simultaneous		همزاد
Singular solution		تادرجل
Solid of revolution		گردشی جسم
Stable		قائم
Subnormal		زیر عماد
Subtangent		زیر مماس
Suspension bridge		جھوللایل
Unstable	U	غیر قائم
Variables Separable	V	متغیر جدائی پذیر

Vibration

اهتزاز

Viscosity

لزوجت

(۴)

اشاریہ

اعداد صفحوں کے لحاظ سے

- ۵۲۲ ابتدائی، تفرقی مساوات کا،
 ۶۳۷ استمقاق، لامتناہی سلسلوں کا،
 ۵۲۲ اسقاط، اختیاری مستقلوں کا،
 ۷۳۱، ۷۹۲ انحداد،
 ۷۳۲ انعطاف، نقاط،
 ۶۸۵، ۶۷۷ باقی، شاہ اور میکلوون کے مسئلوں میں،
 ۶۵۸ پھیلاؤ، تفرقی مساواتوں کے ذریعہ،
 ۶۸۶، ۶۷۳ میکلوون کے مسئلہ کے ذریعہ،
 ۶۵۲ تفرق، قوی سلسلہ کا،
 ۵۲۱ تفرقی مساواتیں،
 ۵۲۳ پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی،
 ۵۳۵ پہلے رتبہ اور اعلیٰ درجہ کی،
 ۵۳۰ ٹھیک،
 ۵۳۹، ۵۳۵ خطی،

۵۹۱	۵۶۳	دوسرے ترتیب کی
۶۵۵		سلسلوں کے ذریعہ مکمل
۵۳۳		متجانب
۶۱۸		ہمزاد
۶۵۳		مکمل، قوی سلسلوں کا
۷۱۰		ٹھیک تفرقی، اسکی شرط
۵۳۰		ٹھیک تفرقی مساواتیں
۶۷۱		نیلر کا مسئلہ
۷۱۱		اس کی توسیع
۶۵۷		جب لا کا پھیلاؤ
۶۵۳		جب لا کا پھیلاؤ
۷۱۳	۷۰۷	جزوی تفرق کی خاصیت مبادلہ
۵۳۹	۵۳۵	خطی تفرقی مساواتیں، پہلے رتبہ کی
۵۷۸		دوسرے رتبہ کی
۵۹۰		مستقل سرول والی
۵۲۵		درجہ، تفرقی مساوات کا
۵۲۱		رتبہ، تفرقی مساوات کا
۵۲۹		زنجیرہ، مکافی
۶۹۶		صغاری ہندسہ
۶۴۵		قیسٹ، کی
۶۵۱		قوی سلسلہ کا تسلسل
۶۵۲		اس کا تفرق
۶۵۳		اس کا مکمل
۵۴۱		قائم خطوط کی
۵۴۷		کلیدی تفرقی مساوات

۶۴۴	گرگوری کا مسئلہ
۷۲۵	لفاف
۹۸۹، ۶۳۹	لوکارچی مسئلہ
۷۱۶	تجانس تقابل، یورکا مسئلہ
۶۰۴، ۵۹۱، ۵۰۹	تتبع تقابل
۷۳۶	متواتر تفریق
۷۰۶	مسئلہ شنائی
۶۸۷	مقیم قیمتیں، تقابلوں کی
۷۲۲، ۷۱۶	میکلورن کا مسئلہ
۶۸۳، ۶۷۷، ۶۷۱	نادرجل
۵۴۸	ہم ارتقاعی خط
۷۱۸	ہمزاد تفریق مساواتیں